



BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III

XX XIV

F

48

XXXIV 7 18

SPERIMENTI IDRAULICI

PRINCIPALMENTE DIRETTI A CONFERMARE LA TEORICA,
ED A FACILITARE LA PRATICA DEL MISURARE
LE ACQUE CORRENTI

DI FRANCESCO DOMENICO MICHELOTTI

Professore di Matematica nella Regia Università di Torino,
e Accademico di onore di Siena.

VOLUME SECONDO,

In cui, oltre alle nuove sperienze, si contengono le risposte dell'autore ad alcuni celebri matematici d'Italia, e due esercitazioni analitiche; nella prima delle quali dimostra una nuova teoria delle progressioni, e proporzioni geometriche; e nella seconda un esame delle equazioni dette irriducibili di terzo grado, l'una e l'altra feconde di utilissime notizie.



IN TORINO NELLA REALE STAMPERIA.

MDCCLXXII





PREFAZIONE.



A promessa di un secondo volume fatta sì al pubblico, che ad alcuni ragguardevolissimi soggetti in particolare, ed il dovere di corrispondenza inverso coloro, che, dopo avere degnato il primo di loro attenzione, dieronmi qualche contrassegno di gradimento, o schiettamente mi avvisarono del loro parere, o pure chiesero qualche schiarimento, o nuova speranza sopra alcun punto di questa non meno difficile, che importante materia, voleano una pronta edizione del presente, quale sarebbe veramente seguita nell'anno scorso, se stato ciò fosse in mio potere. In esso ho procurato di emendare quelle cose del primo, che mi parvero abbisognarne, e di soddisfare, per quanto le deboli mie forze me lo permisero, alle fattemi eccezioni, e dimande nel tempo medesimo, che pubblico le osservazioni, che in questi ultimi anni riuscimmi di fare. Come abbia io tutto ciò adempiuto lo giudicheranno i dotti, alla censura de' quali ben volentieri sommetto questi qualsivogliano miei ragionamenti, ed operati. Imperciocchè, se disdice ad ogni uom' onorato l'ostinarsi in alcuna opinione da forti ragioni combattuta, o dalla comune speranza contraddetta, ancorchè in materia di poco rilievo, quanto più disdirebbe in alcuna tale fissarsi, dove si tratta di assi-

curare qualche punto necessario ; o utile alla umana società. Per il che con quell' animo di verità amico , con cui cotali perione già pregai ad esaminare il primo volume , prego ora pure a farne lo stesso di questo secondo ; sicuro , che ciò faranno in modo da farmi bensì ravvedere dove avessi errato , o a rendere più circospetto l' uso delle cose ivi contenute , non già a farmi pentire delle fatiche da me impiegate a solo fine di giovare : intanto , se vana lusinga non mi accieca , quello qualunque vantaggio , che sia quindi per provenirne , sovvenghasi ognuno doverfi tutto attribuire al zelo dell' Augusto mio Sovrano , sempre rivolto allo avanzamento delle scienze , ed alla perfezione delle arti , ed in particolare maniera di questa , come quella , che non meno giovevole sperimentasi nei dolci tempi di pace , che nei più torbidi di guerra. Pare un dovere , e me lo vollero persuadere gli amici , lo accompagnare la prefazione colle lettere tanto di private autorevoli persone , che di alcune Accademie , per le quali manifesterebbonsi in uno col gradimento le approvazioni del primo volume , e di buon grado l' avrei fatto ; ma riflettendo , che a non pochi sarebbe ciò paruto un voler aggrandire questo secondo con cose non necessarie , nè utili ; anzi un voler accreditare le opere mie colla ostentazione delle altrui testimonianze , ho pensato di ometterle tutte : potendo io ciò fare senza pericolo d' incorrere la taccia d' ingrato ; poichè nel progresso avrò giusto motivo di fare onorata menzione di ognuno col rapportarne a proprio luogo i sentimenti , che tosto ver-

ranno seguitati dalle rispettive risposte, le quali credo potere render pubbliche, non trattandosi qui di opinioni, o di sistemi particolari; ma di cose necessarie a sapersi da tutti coloro, che hanno a cuore lo avanzamento di una scienza cotanto giovevole a tutte, e particolarmente alla nostra nazione.

Codesto volume divideasi in tre parti; la prima e seconda sono interamente spettanti alla idraulica, la terza è puramente analitica. Nella prima, dopo una breve narrazione de' lavori fatti dal 1766. in qua, contengono. Primo, un discorso sopra la pressione de' fluidi, dove con molta semplicità, e chiarezza se ne dimostrano le leggi, e farsi anche qualche parola sopra la compressibilità dell'acqua. Secondo, un altro discorso sopra la celerità iniziale delle effluenti da' vasi, che serve di risposta ad alcune eccezioni del celebre P. Boscovich. Terzo, altro discorso, in cui si esamina, se nello stabilimento della celerità delle effluenti da' vasi, abbiavi qualche parte la ragione dell'ampiezza del vaso verso quella del foro di uscita; e quindi se ad una somigliante ragione avere debbasi alcun riguardo nella misura delle acque correnti. Cotal esame viene accompagnato da varie sperienze, e serve di risposta ad un viglietto del chiarissimo Sig. Dottore Eustachio Zanotti, inserito in una lettera direttami dalla illustre Accademia di Bologna. Da fuori d'Italia non avendo ricevuto lettera particolare, con tutto ciò può sapersi, che ne pensino gli oltramontani dai loro giornali, e libri recentemente stampati, e concernenti il progresso delle scienze, e delle arti.

Nella seconda parte contengono Primo, diverse sperienze con tubi dello stesso diametro, ma di lunghezza diversa, a fine di scoprire la legge degl' incrementi, o decrementi delle dispenfe prodotti dalla varia lunghezza dei medesimi tubi, e si determina la ragione tra il diametro, e la lunghezza del tubo; acciò si ottenga il massimo effetto, o sia la massima dispenfa. Secondo, altre sperienze, e riflessioni sopra la regola del misurare le acque correnti col mezzo di due sezioni; e sopra l'uso del tubo ricurvo del Sig. Pitot; la riduzione del medesimo strumento ad altra forma di uso più comodo, e sicuro; al che aggiungonsi alcune considerazioni sopra l'uso del quadrante, e dichiaransi alcuni punti rilevati dal celebre Sig. Dottore Teodoro Bonati di Ferrara in alcune sue lettere a me dirette. Terzo, altre sperienze, e riflessioni sopra l'uso del regolatore, e sopra il movimento dell'acqua, che passa forzata sotto alla di lui cateratta proseguendo indi liberamente, o impedita, o ringurgitata il suo corso, dove parmi mettere in chiaro un abbaglio dello scrittore della dottissima dissertazione sopra i torrenti, che leggesi sul principio del settimo tomo della raccolta di Parma, concernente la celerità delle acque prodotta dalla pressione. Quarto, descrizione, ed uso di uno strumento, denominato da noi stadera idraulica, perchè serve ad esplorare la forza della impressione di una corrente contro di un piano opposto; e si riferiscono alcune sperienze con esso fatte, che possono servire di schiarimento dei dubbi del sopralodato Sig. Dottore

Teodoro Bonati al proposito di alcune sue sperienze in dette sue lettere riferitemi. Quinto, appendice idrometrica, in cui si dichiara il modo di applicare il calcolo, e l'uso di alcune formole nella misura delle acque correnti.

Nella terza parte puramente analitica contienfi Primo, una esercitazione sopra le progressioni, e proporzioni geometriche, in cui dimostrasì una nuova teoria delle medesime, onde derivasì una facile, e pronta risoluzione di vari problemi, che forse per altra via sarebbero inaccessibili. Secondo, un esame delle equazioni dette irreducibili di terzo grado, dove ad evidenza si dimostra la falsa supposizione, che si fa nei metodi ordinari; si accennano molti casi, ne' quali somiglianti equazioni sono sempre riducibili, e tra altre particolari si dimostra una risoluzione generale delle medesime, con cui algebricamente esprimesi il valore di ciascuna delle tre radici reali, di modo che sensibilmente non differisca dal giusto, e che volendosi con tutta facilità, e prontezza può ridursi tale, a potersi dire esatto, come già ebbe ad esprimersi quel dottissimo uomo d'immortale memoria degno il Sig. Gabriello Manfredi, allorchè gli comunicai in iscriccio codesto mio metodo. Dopo questa, segue pure un'altra risoluzione generale delle medesime equazioni, facendosi però uso delle tavole dei seni, e tangenti. Al quale proposito è da sapersi, che, già sono più di venti anni, aveva io pensato di pubblicare in latino codeste due esercitazioni; quando una serie non mai interrotta di più gravi occu-

pazioni, e disturbi talmente me ne distolse, a non potere prima di ora ridurre ad effetto il mio pensiero. Buon però per me, ed ancora per gli amatori di cotale sorta di bellezze, che l'averle ora dovuto riscrivere in italiano, mi ha dato occasione di migliorarle, ed accrescerle notabilmente; onde in qualche maniera venga a compensarsi il dispiacere di un così lungo ritardo. Il volume è di poca mole, è però da potersi esaminare a bell'agio. Facilmente in alcun luogo non farò abbastanza chiaro, e forse ancora avrò errato: supplisci tu cortese lettore ad ogni mio fallo, e vivi felice.

INDICE

DELLE COSE NOTABILI CONTENUTE NEL SECONDO VOLUME.

P A R T E P R I M A.

<i>Lavori fatti attorno il sito delle sperienze dall'anno 1766. fino al 1770.</i>	pag.	1.
<i>Discorso sopra la pressione de' fluidi</i>		3.
<i>Sperienze sopra la compressibilità dell' acqua</i>		10.
<i>Discorso sopra la velocità iniziale delle effluenti dai vasi</i>		11.
<i>Sperienze sopra l' ampiezza de' getti orizzontali</i>		21.
<i>Discorso, in cui si esamina, se nella costituzione della celerità delle effluenti dai vasi, colla pressione concorravi la ragione dell' ampiezza del vaso, e del foro di uscita</i>		24.
<i>Sperienze al detto proposito</i>		33. e succes.

P A R T E II. C A P. I.

<i>Sperienze con tubi di varia lunghezza</i>		47.
<i>Osservazioni sopra dette sperienze, e si determina il caso della massima dispensa</i>		49.
<i>Cap. 1. Osservazioni sopra la regola delle due sezioni</i>		52.
<i>Sperienze di misura di acque correnti</i>		56.
<i>Estensione della teoria dell' iperboloide</i>		71. n.º 19.
<i>Conseguenze indi dedotte, che mostrano i casi, nei quali varie ipotesi possono verificarsi</i>		73. 10.
<i>Uso delle medesime nel corso de' fiumi</i>		75. 21.
<i>Cap. 3. Osservazioni sopra l' acqua che passa sotto la cateratta di un regolatore, accompagnate di varie sperienze</i>		76. 12.
<i>Osservazioni sopra le cose precedenti</i>		80. 23.

<i>Si spiega il perchè l'acqua, che stramazza dal ciglio di un sostegno per lo più trovisi avere minore altezza di quella, con cui nello stesso sito scorreva liberamente</i>	84. osserv. 8. ^a	
<i>Dubbii circa l'uso del regolatore</i>	88.	n. ^o 24.
<i>Confutazione dell'opinione, che la pressione sempre concorra all'acceleramento delle acque eziandio ne' canali inclinati</i>	89.	25.
<i>Cap. 4. Sperienze, e riflessioni sopra l'uso del tubo ricurvo del Sig. Pitot</i>	96.	27.
<i>Difficoltà del Sig. Dottore Teodoro Bonati di Ferrara, e loro risoluzione</i>	101.	e succes.
<i>Altre osservazioni, e sperienze col tubo ricurvo</i>	105.	e succes.
<i>Le soprariferite sperienze dimostrano la forza della impressione di un'acqua corrente proporzionale al quadrato delle velocità</i>	109.	33.
<i>Nuova forma, ed uso del tubo</i>	110.	34.
<i>Riflessioni sopra l'uso del quadrante</i>	113.	35.
<i>Descrizione, ed uso della stadera idraulica</i>	116.	36.
<i>Appendice idrometrica</i>	123.	
<i>Consuetudine di misurare le acque correnti in Piemonte, ed in alcune altre province di Lombardia</i>	124.	39.
<i>Formola, ed esempi per una luce senza battente</i>	125.	40.
<i>Formola, ed esempi quando è dato un battente</i>	126.	41.
<i>Formola quando non è dato il battente, la quale monta al quarto grado</i>	127.	42.
<i>Lo stesso caso ridotto ad una equazione pura del terzo grado</i>	127.	43.

PARTE III.

<i>Esercitazione sopra le progressioni, e proporzioni geometriche. Parte prima</i>	130.	
<i>Corollario del teorema</i>	132.	3.
<i>Problema primo</i>	133.	4.

<i> Osservazioni sopra le due formole precedenti</i>	134.	
<i> Osservazione , ed eccezione alla regola del Campbell per determinare il numero delle radici reali , ed immaginarie in una data equazione</i>	142.	n.º 7.
<i>Altra risoluzione del precedente problema proposto sotto altra forma , onde ricavanfi molte belle , ed utili analogie</i>	146.	8.
<i>Parte seconda per le serie decrescenti all' infinito</i>	173.	11.
<i>Esercitazione seconda. Esame del caso detto irriducibile nelle equazioni di terzo grado</i>	181.	
<i>Ricerca delle radici uguali nelle equazioni di terzo grado</i>	183.	
<i>Formola generale indicante radici uguali nelle equazioni di terzo grado</i>	187.	4.
<i>Si accennano diversi casi risolvibili delle equazioni di terzo grado , nelle quali le tre radici sono reali</i>	187.	5.
<i>Delle equazioni del terzo grado mancanti del secondo termine</i>	194.	6.
<i>Si dimostra sempre possibile la supposizione di $xyz = q$ nel caso di una sola radice reale , e sempre impossibile nel caso delle tre radici reali</i>	196.	7.
<i>Altra maniera di risolvere le medesime equazioni mancanti del secondo termine</i>	199.	9.
<i>Applicazione dello stesso metodo alle equazioni del secondo caso</i>	201.	10.
<i>Profeguimento delle ricerche per le equazioni numeriche</i>	204.	11.
<i>Profeguimento delle ricerche per le equazioni letterali</i>	208.	12.
<i>Altro caso riducibile delle medesime equazioni</i>	209.	13.
<i>Osservazioni prelie ad altra riduzione generale</i>	212.	14.
<i>La sottrazione di gradi 150., a quella di gradi 30. sta come $\sqrt{3} + 1$ al $\sqrt{3} - 1$</i>	215.	15.
<i>Uso di alcuni limiti nella riduzione di dette equazioni</i>	218.	16.

<i>Uso delle tavole de' seni per altra riduzione delle equazioni medesime</i>	227.	n.° 17.
<i>Divisione dell' arco circolare per approssimazione in parti dispari</i>	231.	



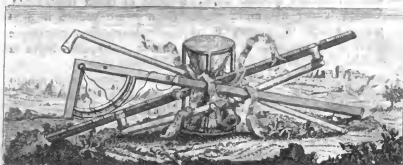
Imprimatur

FR. IOANNES DOMINICUS PISELLI Ord. Praed. S. T. M.,
Vicarius Gen. S. Officii Taurini.

V. SICCUS LL. AA. P.

V. Se ne permette la stampa

GALLI per S. E. il Sig. Conte CAISSOTTI di Santa
Vittoria Gran Cancelliere.



DEGLI SPERIMENTI IDRAULICI

P A R T E P R I M A .

*Lavori fatti attorno il suo delle Sperienze
dal 1766. fino al 1770.*



UANTUNQUE la grandezza e figura del luogo, e la descrizione de' lavori in esso fatti per comodo delle operazioni, o degli operatori non sieno circostanze essenziali alla verità dei fatti, ed alla esattezza delle Sperienze: con tutto ciò fino dal principio giudicai cosa conveniente lo informarne distintamente il leggitore, accompagnando la descrizione con i disegni delle Tavole prima, seconda, terza, e quarta, acciocchè ei potesse formarli una qualche idea, con cui osservare ogni nostro procedimento. Ed avendo ivi accennate le opere, che a farsi rimanevano per compimento del disegno, parmi ora nulla meno conveniente d'informarlo di quelle, che poscia, e fino a quest' ora sonosi eseguite. Massimamente, perchè nella esecuzione delle medesime si

A

²
dovette variare qualche cosa, sebbene di niuna importanza. Onde, se per avventura alcuno dopo avere veduto il disegno, venisse sul posto, e vi osservasse cotali, comunque piccole variazioni, ei potrebbe cadere in sospetto sopra la fedeltà delle altre cose ivi riferite. Perciò dirò:

- 1 Nell'anno 1767. si alzò il muro del recinto verso mezzo giorno, e si tenne tanto allo indentro del canaletto conduttore, quanto allo infuori del medesimo trovasi segnato sulla pianta, e ciò per motivi, che nulla giova qui di allegare. Nell'anno medesimo si proseguì di muro esso conduttore per piedi 41. 6., onde la di lui estensione in muraglia sia di piedi 137. 6., ai quali aggiugnonsi ancora per diritto piedi 9. 3. in legno, con che la totale sua lunghezza in linea retta sia di piedi 147. circa.
- 2 Il muro del recinto verso levante, che sulla pianta stendesi in una sola retta, nella costruzione seguita nell'anno 1768. dovette piegarsi alquanto in dentro. Nell'anno medesimo si compì il casotto, o baraccone, ed il ponte amovibile in modo da poterli nel suo mezzo alzare, ed abbassare, secondo l'alzamento, od abbassamento dell'acqua nel canale de' mulini, con che più comode, e sicure riescono le osservazioni, che sopra esse si fanno. Il comporlo poi, e lo scomporlo è fattura di breve ora di due lavoranti.
- 3 Nel 1769. si compì in rustico toscano la porta principale verso mezzogiorno, coperta di frontispizio, e decorata con scudo, corona, e cifra Reale; ed altra minore più semplice verso levante, oltre a due portine, che danno l'adito agli scaricatoj verso ponente, e verso levante, questo però non è per anco cominciato.

DISCORSO I.

*Sopra la pressione de' fluidi, e qualche sperienza
sopra la compressibilità dell'acqua.*

Quantunque le leggi della pressione, e dell' equilibrio de' fluidi sembrano delle più facili ad intendersi, e fedelmente corrispondano alle Sperienze, e, dopo aver detto, che la pressione de' fluidi falli per ogni verso, ed è sempre proporzionale all' altezza, parer possa, che nulla rimanga a dirsi, od a cercarsi: con tutto ciò nè tali, nè immediatamente dedotte dalla natura stessa del fluido, nè così universali, quanto abbisogna una perfetta teoria, esse appariscono a coloro, che nelle migliori teorie de' moderni non trovano un generale consenso nelle conseguenze, ma talora un' aperta dissonanza, ed infelicamente spiegati varj fenomeni. Così accade a chiunque prendesi ad esaminare le teorie del Newton, dei Bernulli Gioanni, e Daniello, del Poleni, e del De Alembert, e le paragona con quelle del Toricelli, del Mariotte, del Guglielmini, del Grandi ec. Le une sono troppo profonde, e però meno chiare, ed ancora sospette, perchè alle volte veggonsi contraddette dalle Sperienze. In altre fannosi da' loro Autori supposizioni tacite, od espresse fra loro diverse, e per se medesime non sicure, o si assumono per date alcune cose, che veramente non lo sono. Per le quali ragioni tutte incerte le ravvisa, e le rigetta il dotissimo P. Lecchi nella sua Idrostatica stampata in Milano nel 1765., ed ama meglio di attenersi alle Sperienze. Ma se pure di alcuna sia necessario fare uso, quella essere dovrebbe la più semplice, ed evidente, e che per una via più piana ne mena alla risoluzione de' casi, che vanno occorrendo. Non intraprendo già io un somigliante esame, nè a censurarne alcuna, parendomi assai più facile il cercarla di nuovo; che quelle tutte rivolgere, e paragonare fra loro, per fare scelta della migliore. Perciò sul bel prin-

cipio, e senza dare in sottrigliezze, atte piuttosto ad imbarazzare i dotti, che ad istruire coloro, che tali non sono, e che il più sovente hanno le mani in pasta, ammetto la definizione del fluido dataci dal Newton, abbracciata da' moderni, e dallo stesso Sig. De Alembert riputata la migliore; talmente che pensò poterne da essa sola dedurre la nuova sua teoria. Alla definizione del Newton può aggiugnersi ancora quella di Aristotile, non già per necessità; ma perchè da entrambe unite meglio si conosce la natura del fluido.

1. Questo si definisce dal Newton un corpo composto di particelle nulla, o pochissimo fra di loro aderenti, prontissime a muoversi per ogni verso, ed a cedere ad ogni menoma impressione. E da Aristotele, un corpo, che difficilmente contienesi tra i proprj termini, e facilmente dagli altri, o ciò, che vale lo stesso, un corpo, che non affetta, o ritiene da se stesso figura alcuna, ma che prontamente si adatta a quella qualunque siasi di un vaso, che lo contenga.

2. A codeste definizioni unisco la sicura ipotesi della gravità comune a tutti i corpi; e quindi ogni fluido, ed ogni sua parte come grave direttamente tende al comun centro de' gravi. Da questa ipotesi tosto ne segue, che la suprema, e libera superficie di un fluido contenuto in un vaso compongasi in isferica concentrica al globo terraqueo, cioè stendasi orizzontalmente, onde ricavasi la maniera più facile; e sicura del livellare.

E perchè nei piccoli intervalli presi nella superficie del globo terraqueo la superficie orizzontale del fluido può senza errore sensibile considerarsi come piana; le direzioni di ogni suo elemento verso il comun centro de' gravi, possono considerarsi come perpendicolari ad essa superficie, e come fra di loro paralelle.

Dal comporsi in orizzontale la suprema libera superficie d'un fluido contenuto in un vaso, tosto si comprende, come nei tubi, o vasi comunicanti riducasi ad una orizzontale medesima. Di maniera che, se in un vaso pieno di acqua tranquilla, e queta immergati un corpo solido, all' intorno

del medesimo ugualmente tant' acqua sale, quanta è la mole immersa, ripigliando dopo alcuni ondeggiammenti la orizzontale sua superficie, alquanto più elevata della prima. Dal che facilmente deducansi tutte le leggi dell' equilibrio tra i fluidi omogenei, eterogenei, e tra i fluidi, e solidi di gravità specifica diversa, le quali non abbisognano di essere qui spiegate.

- 3 Premesse queste cose: considerisi un fluido quiescente in un vaso $ADFE B$ (Tav. 1. fig. 1.) di figura qualunque, ed aperto per di sopra, sarà dunque orizzontale la sua superficie AB ; ed ogni porzione, o gocciola sensibile, come G ovunque posta stasene in quiete, perchè in equilibrio con ognuna delle altre contenute nel vaso medesimo. Per G tirisi una verticale CGF ; sarà la pressione verticale; superiore CG uguale alla riazione della opposta, ed inferiore FG ; altrimenti la gocciola G non sarebbe in quiete; ma salirebbe, o discenderebbe cedendo alla pressione più forte. Tirisi ancora per G una qualunque altra retta trasversale DGE ; e per la stessa ragione saranno uguali le pressioni opposte laterali DG , EG . Altrimenti la gocciola G porterebbe verso quella parte, ove minore fosse la pressione. Lo stesso dee dirsi delle altre infinite pressioni laterali, ed opposte, prese in qualunque altra retta trasversale menata per G , qualunque siasi la distanza, di G dal fondo, o dalle pareti del vaso.

Ora codeste pressioni opposte non solamente sono uguali prese a due a due sopra la stessa retta menata per G ; ma ciascuna è altresì uguale alla medesima pressione verticale CG ; perchè alcune di esse o faranno, o potranno fingersi uguali alla CG , senza che perciò si turbi nè l'uguaglianza fra esse, nè l'equilibrio; e per conservarlo nella gocciola G , egli è lo stesso, come se realmente le pressioni fossero tutte uguali alla CG . Dunque la somma di tutte le pressioni, che nel piano $ADFE B$ segante il vaso soffre la gocciola G , può esprimersi coll' area di un circolo, il cui raggio sia uguale alla verticale CG ; e la somma di tutte le pres-

sioni, che la medesima goccia G sostiene da tutto il fluido contenuto nel vaso, può esprimersi colla solidità di una sfera, il cui semidiametro sia uguale alla medesima verticale CG .

- 4 Le istessissime cose dovendosi dire di ogni altra goccia ovunque posta nel medesimo vaso, ne segue, primo, che le semplici pressioni lineari, sostenute dalle diverse gocce, sono come le altezze del fluido soprastante: secondo, che le somme delle pressioni prese nei piani seganti il vaso, e condotti per le diverse gocce, sono come i cerchi, e le somme delle pressioni di tutto il fluido contro ogni goccia, sono come le sfere, i semidiametri delle quali sono uguali alle rispettive altezze del fluido ad esse gocce soprastante.

Ma i cerchi sono come i quadrati, e le sfere sono come i cubi, i lati de' quali sono uguali ai semidiametri dei cerchi, o delle sfere. Dunque le semplici pressioni lineari sono come le semplici altezze del fluido; le somme delle pressioni in ogni piano segante il vaso sono come i quadrati; e le somme delle pressioni di tutto il fluido contenuto nel vaso sono come i cubi delle altezze del fluido ad ogni goccia soprastante. Che se il vaso fosse di tal figura, che l'altezza del fluido sopra alcuna goccia non giugnesse alla suprema superficie orizzontale del fluido, essa dovrà nè più, nè meno computarsi per intera, come se a detta superficie orizzontale di fatto terminasse. Il che osservato; nel resto poi, qualunque siasi la figura, o l'ampiezza del vaso, sempre le pressioni si faranno nella dimostrata maniera.

- 5 Quindi, se le altezze del fluido si accrescono per infusione di altro, o si diminuiscono per l'emissione del contenuto, le differenze delle pressioni lineari saranno come le differenze de' quadrati, e le differenze delle pressioni di tutto il fluido contro ciascuna goccia saranno come le differenze dei cubi, i lati de' quali sieno come le diverse altezze del fluido a ciascuna goccia soprastante.

In oltre o sia che le pressioni si accrescano per infusione, o si diminuiscano per emissione del fluido contenuto nel vaso, od in altra qualunque equivalente maniera, l'effetto sarà il medesimo. Onde facilmente si comprende, perchè premendosi da una qualunque parte un fluido onninamente chiuso in un vaso, la nuova pressione stendesi ugualmente all'intorno per ciascun punto della superficie continente. Imperciocchè ogni nuova pressione anche laterale, ed obliqua, sempre equivale ad altrettanta verticale; ed ogni verticale ad altrettanta obliqua, e laterale. La qual cosa dal Signor De Alembert si assume come un principio di sperienza, mentre per altro parmi piuttosto un principio di ragione immediatamente dedotto dalla definizione del fluido, e dalle naturali precedenti posizioni.

- 6 Inteso il modo, con cui ogni porzione di fluido quiescente equilibrafi con tutte le rimanenti racchiuse nello stesso vaso, intendesi parimenti, come al togliersi l'equilibrio di una sola particella, togliesi nello stesso tempo l'equilibrio di tutte. Di maniera che in ciascuna seguir dee qualche movimento, o tendenza al movimento verso la parte meno resistente, in quella guisa, che nel continuo, o nel sistema di più corpi immediatamente contigui, non può muoversi un estremo, senza che nello stesso tempo movasi l'altro, con tutte le parti, o corpi intermedj, senza verun bisogno di tempo sensibile per la comunicazione del movimento dall'uno all'altro termine. Così al primo muoversi di una porzione qualunque del fluido quiescente, necessariamente le altre tutte, sieno superiori, od inferiori, o laterali, tendono a muoversi verso dove incontrano minor resistenza, e di fatto vi accorrono, se non sono impediti; od impedendosi scambievolmente tra di loro colla obbliquità, ed opposizione delle loro direzioni, le più libere sono le prime ad accorrervi, succedendo a queste le altre più prossime, e meno impediti, senza che per questo segua divisione di materia, o separazione delle parti, o vuoto tra esse, se non nel caso, che quel primo movimento impresso fosse così violento,

che eccedesse quello, che naturalmente può loro imprimere la semplice pressione, o la forza ad essa pressione equi-
pollente.

- 7 Fingasi ora, che per qualunque cagione cessi la pressione EG ; e l'intervallo GE concepiscasi come un canaletto solido perfettamente liscio, e capace della gocciola G . Cessando per l'ipotesi la pressione EG ; ed a cagione del supposto canaletto, rimanendo le altre ancora fra loro equilibrate, a riserva della sola, ed opposta DE , questa non trovando più resistenza veruna, impiegherassi tutta nel mettere in movimento la gocciola G ; ma la pressione DE è uguale alla verticale CG ; dunque la pressione, o forza, che dappprincipio mette in movimento la gocciola G è uguale alla pressione verticale CG . Poichè la gocciola G potendosi considerare come nulla rispetto a tutta la verticale, che le sta sopra, non fa resistenza veruna alla suddetta pressione. Quindi tutta intera essa pressione verticale impiegherassi fin dal bel principio a mettere in movimento essa gocciola G . Ma le forze motrici generalmente sono come i quadrati delle celerità generate in tempi uguali. Dunque la celerità, con cui moverassi la gocciola G , farà come $\sqrt{CG}$; come concordemente conchiudono le migliori teorie, e lo confermano le Sperienze.

- 8 Quanto alla direzione del movimento, ivi viene determinata dal supposto canaletto. Ma in ogni caso si osservi, che siccome le pressioni tutte contro la gocciola G fanno colle direzioni dei raggi di un circolo tendenti ad essa gocciola come al centro, così le riazioni della medesima contro le pressioni tutte fanno oppostamente colle direzioni medesime. E se la gocciola G toccherà il fondo, o la parete del recipiente, allora la riazione del fondo, o della parete farà le veci della pressione EG contro la opposta DG . Per il che, se ivi aprasi un foro, cioè tolgasi la riazione del fondo, o della parete, la direzione della effluente farassi normale al piano dell'apertura, se questa intagliata sia normalmente alla spessore del vaso. Altrimenti seguirà quella dell'apertura

9
apertura stessa, come quella di un principio di canale. Ma supposta detta apertura intagliata normalmente alla spessorezza del vaso, comunque poi il fondo, o la parete sia orizzontale, verticale, od inclinata, o comunque piegata, od incurvata, farà sempre la direzione del getto normale al piano dell'apertura: perchè l'azione, e la riazione de' corpi facendosi con direzioni opposte, e nel sito dell'apertura non trovandosi riazione, dunque l'azione seguirà la direzione dell'agente: ma codeste direzioni sono quelle dei raggi di un circolo, o di una sfera, e questi prolungati oltre la circonferenza del circolo, o la superficie convessa della sfera, sono ad essa circonferenza, o superficie convessa perpendicolari, e però perpendicolari alle tangenti della circonferenza, o della superficie convessa, menate per l'apertura: dunque qualunque siasi la figura del recipiente, la direzione dell'efflusso seguirà sempre quella del raggio osculatore della curvatura, che avrà il fondo, o la parete del vaso nel luogo dell'apertura, cioè farà sempre normale al piano dell'apertura medesima.

Stabiliti, e dichiarati, a parer mio, con ogni evidenza codesti principj, facile riesce l'innoltrarsi ad altre ricerche, valendosi opportunamente della geometria, dell'analisi, e della meccanica: purchè non si voglia troppo generalizzare in materia cotanto sdruciolevole: pretendendo di stenderne la teoria ad ogni genere, e condizioni, talora fittizie ancora, di fluido; senza escluderne le troppo oscure leggi di attrazione, di repulsione, di tenacità, e densità unitormi, e difformi, le quali son persuaso, che nè con ispecolazioni, nè con isperienze potranno mai abbastanza dilucidarsi, e di quali non abbisogna la dottrina delle acque correnti, che forma il principale nostro scopo: dovendo noi rimanere contenti, se almeno in questo particolare avremo sufficienti fondamenti, per appoggiarvi sopra le nostre operazioni, senza ridurci al nulla strignere per voler troppo abbracciare.

Sperienze sopra la compressibilità dell'acqua.

9 **G**ià in varie guise tentarono i sili di scoprire, se i fluidi, e specialmente se l'acqua sia, o non sia capace di compressione. Lo assicurarci di questo punto colla sola specolazione non è sperabile: troppo ci manca. Niuna sicura cognizione avendo nè della figura, nè della durezza delle parti elementari, nè del loro scambievole, ed immediato contatto. Di necessità convien ricorrere alle sperienze. Quelle di Francesco de Lanis non sembrano conchiudenti, quelle dell' Accademia del Cimento la dimostrano sensibilmente incompressibile. A farne alcuna m' indusse il Signor Dottore Candido Pistoi chiarissimo Professore di Matematica nell' Accademia di Siena, quando nell' anno 1768. si compiacque di assistere ad alcune nostre Sperienze.

Al che cominciando io a pensare, parvemi, che dalle Sperienze già fatte, sebbene ad altro intendimento, si potesse trarne qualche argomento. Cioè essendo state fatte moltissime Sperienze colle stesse luci, e similmente applicate, sotto altezze per più piedi fra di loro disuguali, da esse altro non si ricavò, se non che le celerità delle effluenti erano in ragione sudduplicata delle altezze dell'acqua sopra dette luci. Ma codesta ragione non sarebbe costantemente osservata nelle dette Sperienze, se l'acqua verso il fondo della Torre fosse stata sensibilmente più compressa, che in cima verso la superficie. Poichè se la effluente verso il fondo fosse più compatta dell' altra, dopo essere uscita pel foro, e caduta nella Vasca, avrebbe recuperato lo stato men compatto, e men denso; e quindi avrebbe occupato nella Vasca maggiore spazio, che nella Torre, il che non trovai essere sensibilmente accaduto. Altra particolare, ed a mio parere più convincente fecesi li 24. Ottobre del 1768., in cui si rese del giusto peso di oncie otto, o sieno grani 4608. quel globetto, che serve di pendolo al nostro quadrante, descritto al n. 104. del primo volume. Quelto globetto poco sotto la superficie dell'acqua, da cui era total-

mente coperto; si trovò del peso di grani 2964.; e lo stesso pesato immerso fin vicino al fondo della Torre, cioè sotto al più di piedi 21. di acqua, trovossi di grani 2973.

Il filo di seta cruda, cui si sospese il globetto, essendo lungo piedi 24., pesava nell'aria grani 15.; ma bagnato, e tratto fuori dell'acqua pesò grani 32. E pesato nell'aria il globetto insieme col filo così bagnato, trovossi di grani 4640., da cui sottrando li grani 32. del filo bagnato, rimane il peso del globetto in aria di grani 4608.; e sottrando dal peso del globetto immerso vicino al fondo della Torre, cioè da grani 2973. il peso relativo del filo in acqua di grani 9., rimane il peso relativo del globetto in fondo alla Torre di grani 2964., affatto uguale al peso del medesimo immerso poco sotto la superficie dell'acqua. Quindi anche dato nelle pesature lo sbaglio di un grano, la compressione dell'acqua sotto un'altezza maggiore di piedi 21., trovasi insensibile.

DISCORSO II.

Sopra la velocità iniziale delle effluenti da vasi.

Egli è un principio comunemente ricevuto da' filosofi, che la natura nel produrre i suoi effetti non opera per salto, ed in un istante, ma v'impiega un tempo il più breve sì, ma però finito. Affidati a codesto principio alcuni scrittori d'Idraulica insegnano, che allo aprirsi del foro di un vaso non esce l'acqua immediatamente con tutta la celerità conveniente alla pressione; ma che ad essa perviene in un tempo brevissimo sì, ma finito, passando per tutti gl'infiniti gradi intermedj dalla quiete fino alla celerità massima, che alla pressione compete. Cotale opinione tenni lungamente io pure; ma in fine le replicate osservazioni fatte nel corso delle nostre Sperienze, ed alcun'altra riflessione, mi fecero da prima vacillare, e poscia ancora cangiare di parere in questo particolare, siccome mi spiegai, al n. 66.

B 2

primo volume. Dove per altro non mi estesi gran fatto ad avvalorare con argomenti la nuova mia opinione, non avendo allora altra mira, che di cercare ciò, che giovare potesse alla pratica, a cui vera, o falsa che sia tale opinione, non può recare verun disturbo.

Con tutto ciò, contro essa levossi il primo il rinomatissimo P. Boscovich con una sua del 22. Giugno 1767., in cui tra altre eccezioni ad altro proposito, diversi argomenti apporta, ed esempj per combatterla, e dopo lui altri dotti ancora chi in voce, e chi in iscritto. Il che obbligommi a ripensarvi assai seriamente; ma o sia forza di verità naturale, o prevenzione non conosciuta in favore della nuova opinione, tutte le cose dette, o scritte contro essa, mi parvero troppo mancanti di forza sia per atterrare la nuova, che per confermare l'antica in questo particolare soggetto. Onde penso di fare cosa grata agli amici del vero, comunicando loro queste risposte, dalle quali, se non altro, potrassi ricavare quale, e quanta essere debba la nostra circospezione tanto nell'ammettere per principj delle scienze certe proposizioni generali, che a prima giunta hanno un'apparenza d'infallibilità, o di evidenza; quanto nell'applicazione de' principj veri a materie particolari. Codesta circospezione volli io accennare nel citato luogo del primo volume, ove dissi, che una cosa è il doverli dalla natura preparare la materia all'effetto, e questo certamente richiede un tempo finito, ed altra cosa è il passaggio all'effetto medesimo, quando la materia è di già sufficientemente preparata a produrlo; e per questo parmi affatto evidente non richiederli tempo finito. Ma veniamo ad altre prove, omettendo eziandio le osservazioni fatte, e riferite nel detto luogo; e si rifletta.

1. Che quel gran matematico Giovanni Bernulli, dopo avere detto, che il tempo necessario all'effluente per acquistare la celerità massima, ed uniforme conveniente alla pressione, accuratamente parlando, dovrebbe essere infinito, confessò poi ingenuamente al n. 26. parte seconda della sua Idrauli-

ca, che la speranza continuamente ne lo dimostra brevissimo, anzi inosservabile. Così pure, accuratamente parlando, infinito essere dovrebbe il tempo necessario a farsi l'altezza d'acqua, che scaricasi uniformemente in un vaso, da cui ne esce per un foro non capace di tutta tramandarla da principio; infinito dissi, essere dovrebbe il tempo necessario a farsi l'altezza, capace a produrne l'efflusso costante, ed equabile, come vedesi dimostrato nella risoluzione del problema del Signor Montucla, e riferito al n. 116. del primo volume; e intanto le sperienze fatte col regolatore, giusta il metodo del Guglielmini, lo dimostrano finito, ed in circostanze opportune anche breve. Il P. Lecchi insegna maestro di questa scienza dell'età nostra, dopo essersi in più luoghi dichiarato in favore di codesto principio; finalmente nell'esame primo parte quinta dell'esimia sua opera, parlando de' getti verticali, così si esprime (qui risetto, che come ci è nota la cagione della diminuzione, che è la resistenza dell'aria, così è troppo ragionevole a credere, che nel primo uscire, vi sia realmente la velocità, che si acquisterebbe cadendo da quell'altezza, ed in oltre ec.) ma se ragionevole cosa sia ammettere questa velocità nel primo uscire dei getti verticali, non meno ragionevole sarà l'ammetterla nei getti orizzontali, ed obbliqui. Se pure il vaso non fosse, o facesse le veci di un siffone, dove la velocità iniziale del getto si è la differenza fra le velocità competenti alle due altezze dell'acqua nelle due braccia del siffone: nè farsi la competente all'eccesso dell'altezza maggiore, se non dopo un certo tempo, come osservò il Belidor sul principio del cap. 2. lib. 4. tom. 2. della sua Architettura Idraulica, e dopo lui il Desagulieres pag. 160. tom. 2. del suo corso di Fisica. Ma intanto neppure qui la celerità iniziale comincia dalla quiete. Dopo ciò desidererei sapere come si possano conciliare insieme teorie, che diconsi accurate colla continua speranza, che con tanta chiarezza le smentisce. Converrà dunque dire o che i principj, su i quali si appoggiano non sono così certi, ed universali come si

credono, o se pure sono tali, ch' essi non vengono a dovere applicati ne' casi, e soggetti particolari.

- 2 Facciamoci ora a considerare di proposito codesto principio in se medesimo, e l'applicazione, che se ne vuol fare in questa materia. Forse ci scopriremo più d'immaginazione, che di realtà, ed un estensione più limitata di quello, che si pensa. Primieramente poniamolo in confronto di altro principio naturale più chiaro, ed intelligibile, cioè che dalla potenza all'atto non v'ha che un tratto; oppure, che la natura produce i suoi effetti nel tempo brevissimo. Nella presente quistione la potenza esiste sempre tutta intera, ed è la pressione; questo tratto, e questo tempo brevissimo è indefinito; e perciò può essere vario in varj casi, ed effetti, i quali dovranno esaminarsi in particolare. Nulla ci assicura, che codesto tratto, o tempo brevissimo, sia finito, e composto d'istanti infinitesimi del primo ordine, oppure infinitesimo, ma composto d'istanti infinitesimi di un ordine superiore. In questo ultimo supposto si salverebbe in qualche modo una certa successività di azioni istantanee produttrici dell'effetto intero.

In secondo luogo non potendo noi concepire la maniera, con cui i corpi scambievolmente agiscono tra di loro senza il concorso di qualche movimento: ed ogni movimento richiedendo uno spazio da percorrerli, e quindi un tempo, ed un qualche grado di celerità a percorrerlo; se lo spazio potessimo infinito, esso non si percorrerà che in un tempo infinito con una celerità finita; oppure percorrerassi in un tempo finito con una celerità infinita. Se lo spazio pongasi finito, esso potrà percorrerli in un tempo finito con una celerità finita; oppure in un tempo infinito con una celerità infinitamente piccola; ed anora in un tempo infinitamente piccolo con una celerità infinitamente grande; ma se il tempo, e la celerità pongansi amendue infinitamente piccoli del primo ordine, allora lo spazio dovrà essere un infinitesimo dell'ordine secondo: il simile dicasi in ogni altra posizione.

In terzo luogo, concependosi il continuo come composto di parti immediatamente fra loro aderenti, ed unite, ne segue, che ad un suo estremo imprimendosi qualche movimento, questo nel tempo medesimo si comunichi ad ogni altro estremo, ed a tutta la massa: perchè tra le parti componenti, non v'ha spazio da percorrerli. Ne' corpi duri poi non dovendosi supporre moto particolare nelle parti percosse, ammettcsi necessariamente istantanea l'azione fra di loro; solamente ne' corpi elastici, le cui parti concepiscansi pieghevoli, e retrocedenti nell'urto, sebbene tostamente rimettansi dopo l'urto nel primiero loro stato, si vuole che l'azione fra essi si faccia in un tempo brevissimo sì, ma finito: di modo che nel primo istante non si generi, che una celerità infinitamente piccola, la quale successivamente si accresca colla successività delle azioni reiterate infinite volte negli istanti susseguenti, la somma de' quali faccia un tempo finito, al compiersi del quale si compisca l'effetto, cioè imprimasi al corpo tutta la celerità, che dall'agente può imprimersele; ma codesto tempo finito non si può accertare nè con isperienze, nè con dimostrazione veruna. Oltrechè non consta trovarsi in natura corpi perfettamente continui duri, nè perfettamente solidi, o fluidi, od elastici.

Le Sperienze però dimostrano l'acqua non sensibilmente compressibile, dunque le particelle che la compongono saranno sommamente dure, e toccherannosi immediatamente. Dunque il composto da esse sarà insensibilmente elastico: dunque l'azione scambievolmente tra l'acqua premente, e la premuta, farassi in un tempetto insensibile, come lo attestano le Sperienze.

3 In oltre non si può comprendere, come una serie di termini infiniti di numero sì, ma continuamente decrescenti, e de' quali il primo, e massimo si vuole che sia un infinitesimo del primo ordine, possa nondimeno fare una somma finita. Cioè, come una celerità, che da principio si vuole infinitamente piccola, la quale negl'istanti susseguenti si accresce bensì, ma con aumenti sempre minori, che negli

istanti precedenti, possa in fine di un tempo finito, e brevissimo divenire una celerità finita. Ma lasciamo per ora in disparte questa difficoltà, e diciamo, che la presente questione trattata fisicamente conchiude per un tempetto insensibile, accordandosi in ciò colle Sperienze, che al di là del sensibile giugnere non possono. Ma trattata matematicamente col discorso del celeberrimo Dottore Eustachio Manfredi, ed analiticamente espresso dal P. Lecchi nel quinto esame, parte prima della sua Idrostatica, conchiude per un tempetto infinitamente piccolo: poichè conchiude essere finita la celerità prima dell'effluente. Nè un tale discorso, o calcolo può dirsi erroneo, se non si dimostri in che, e dove sia l'equivoco, od il paralogismo, non bastando, che non si accordi semplicemente con un principio, che a buona ragione può essere sospetto, almeno nell'applicazione a questo particolare soggetto.

La conclusione medesima ricavasi dai principj generali di meccanica dallo stesso P. Lecchi ricevuti. Cioè qualunque velocità impressa in un corpo essere in ragione composta della forza, e del tempo, in cui essa forza agisce, e nella reciproca della massa contro cui agisce. Ivi la forza è sicuramente il peso dell'acqua, qualunque esso sia, purchè finito, e questo dicasi $= P$; il tempo, in cui agisce dicasi $= T$, la massa contro cui agisce $= M$, la velocità impressa dicendosi $= V$, sarà sempre $V = \frac{P \times T}{M}$.

Dove ponendosi P , e T quantità finite, ed essendo M , cioè la prima acqua attigua al foro, essendo infinitamente piccola rispetto al P , ne segue, che V dovrebbe essere infinitamente grande, il che ripugna; nè altrimenti può farsi V infinitamente piccola, se non sia M infinitamente grande, il che è pur falso; e solamente fatti V finita ponendosi T infinitamente piccolo, e dello stesso ordine di M .

Oppure: perchè al primo aprirsi del foro, farsi uno sbilanciamento, o tendenza al moto in tutta l'acqua del recipiente. Se tutta essa acqua dicasi P , la sua tendenza al moto
in

in quel primo tempo dicasi V , la sottilissima lama di acqua applicata al foro chiuso, dicasi M la celerità, con cui esce nel primo istante dell'apertura $= U$, gli effetti adeguati dovendo essere proporzionali alle loro cause, farassi $P \propto V = M \propto U$; ma R è quantità finita, V ed M sono infinitesime, dunque U , cioè la prima celerità della effluente sarà finita.

- 4 Immaginiamoci ancora un vaso prismatico, o cilindrico pieno di acqua, nel cui fondo siavi un foro, che non abbia sensibile proporzione coll'ampiezza del vaso. In questo caso, si ammette concordemente, che al successivo abbassamento dell'acqua nel vaso, e ad ogni punto dell'altezza verticale, corrisponde un grado di velocità nell'effluente, che si rappresenta coll'ordinata di una parabola, il cui asse è l'altezza dell'acqua nel vaso, ed il vertice nel fondo; e la massima ampiezza alla superficie suprema dell'acqua: ma se nel primo istante dell'aprirmento, la celerità dell'effluente sia infinitamente piccola; dunque nel primo istante la scala delle velocità toccherà l'asse, ed in un brevissimo tempo cangerassi in una parabola per tutte le altre altezze, ed in fine tornerà necessariamente a toccare l'asse, cioè la massima, e la minima pressione faranno effetti uguali, ciò che in geometria sarebbe un salto più difficile a concepirsi, di quello sia in natura l'azione istantanea de' corpi fra di loro.

- 5 A quanto sopra opponesi in primo luogo, che se al suddetto vaso prismatico, o cilindrico si togliesse il fondo, allora tutto il corpo di acqua discenderebbe a modo di un grave solido, cominciando dalla quiete il suo moto. Rispondo, che il caso di un vaso, da cui togliesi il fondo, è troppo diverso da quello di un semplice foro minore dell'ampiezza del vaso: primo, perchè dagli oppositori non hassi verun riguardo alla natura del fluido nei due differenti casi. Il fluido, come grave, soggiace bensì alle leggi comuni agli altri gravi; ma come fluido ritiene ancora le sue particolari, e principalmente la pressione per ogni verso, e la somma mobilità delle sue particelle elementari per mezzo alle

altre. Questa pressione per ogni verso, e questa somma mobilità delle particelle elementari non concorre solamente alla conservazione, ma ancora all'acceleramento del moto, il che non ha luogo ne' gravi solidi. Siccome neppure nel fluido posto in un vaso, da cui togliesi il fondo: poichè allora tutta la massa del fluido gravita a modo di un solido, e la libera sua discesa non lascia alle particelle elementari la libertà nè di premere le altre, nè di moverfi con moto, e direzione diversa dalla massa. Ma la cosa va tutt'altrimenti, quando il foro di uscita è minore dell'ampiezza del recipiente.

Secondo. Nel vaso senza fondo non potrà mai farsi altezza permanente di acqua, quando ancora la quantità che s'infonde fosse infinita, siccome dimostra Giovanni Bernulli nella sua Idraulica: quindi tolto il fondo, togliesi la pressione, cagione dell'acceleramento negli altri casi. Non così succede, quando il foro è notabilmente minore dell'ampiezza del vaso, potendosi allora formare nel vaso qualche altezza permanente, soltanto che quella, che s'infonde sia in tanta quantità, che da principio tutta escire non possa per il foro; con che farsi luogo alla pressione laterale, e quindi all'acceleramento del moto. Per ora basti il detto fin qui: avremo occasione di ritoccare questo punto nel seguente terzo Discorso.

- 6 Nella sopra mentovata lettera del P. Boscovich, e dal P. Lecchi ancora nell'esame ottavo parte prima pag. 186., dicesi, che l'acceleramento dell'effluente compiesi fuori del buco, e nel sito della vena sommamente ristretta; e ciò poterfi ocularmente osservare.

Rispondo, che l'oculare ispezione parmi ne convinca di tutt'altro, che del termine dell'acceleramento; piuttosto ne convince di quanto la somma de' moti diretti venga diminuita dagli obliqui, e laterali, siccome ne assicurano le sperienze fatte con luci fornite di tubi, o d'imbuti, quali medianti sparisce la contrazione della vena, e farsi notabilmente maggiore la dispenfa, sebbene alquanto più corto il

getto; e quindi alquanto minore la velocità comune; poichè in questi casi la massima celerità dee partecipar da un maggior numero di particelle, caduna delle quali presentasi all'orifizio con diversa direzione. Nel resto è cosa assai chiara, che le particelle poste sotto uguali altezze; quanto è da loro tendono con forze uguali all'uscita, e solamente la diversa loro posizione, e distanza rispetto al foro di uscita, obbliga ciascuna di esse ad una particolare direzione, onde fattesi convergenti urtano in quelle, che sono normalmente dirette al foro, o sia in quelle, che sono parallele all'asse dell'efflusso, ritardandosi così, ed accelerandosi le une colle altre, che finalmente compongonsi in una vena circonscritta da superficie curva, e che termina a poca distanza dal foro, dove già cessate sono le resistenze, e le azioni loro reciproche. Quindi nel sito della vena ristretta non compiesi altrimenti l'acceleramento dell'efflusso, che anzi trovasi ivi un residuo del totale movimento delle particelle tendenti all'uscita.

Nella suddetta lettera del P. Boscovich pare, che in qualche luogo io abbia detto, che l'aumento delle dispende prodotto dagl'imbuto, o da tubi sia l'effetto della velocità accresciuta. Non saprei dove ciò siami scappato, nè mi viene indicato il luogo. Sono per altro persuaso, che niuno aumento di celerità può farsi da cagioni estrinseche; ma bensì l'aumento di materia colla diminuzione delle resistenze, e coll'accreverci la materia deve seguirne qualche diminuzione nella celerità comune, come poc' anzi ho accennato.

- 7 Nel più volte citato luogo num. 66. del primo volume, avendo io detto, che in tutte le nostre Sperienze erasi costantemente osservato, che la prima acqua uscente dal foro lanciavasi alla sua conveniente distanza, senza caderne fra via parte sensibile della grossa vena effluente: ripiglia il P. Boscovich, che anche la palla del cannone giugne di slancio alla grande distanza, ed anche il globo spinto da una molla, che lasciassi liberamente giuocare, viene portato a quella distanza, che compete alla velocità impressale dall'ela-

stro; ciò non ostante essere totale celerità l'effetto di una serie infinita di azioni istantanee, esercitate in un tempo brevissimo sì, ma finito, e composto da una infinità d'istanti successivi.

Al che potrebbesi replicare quanto superiormente già è stato detto a questo proposito: cioè non potersi in verun modo dimostrare, che cotali istanti successivi sieno piuttosto del primo ordine, che di un altro superiore ec. Che che ne sia però. Codesti esempj sembranmi di un genere troppo diverso dal nostro caso per poterne quindi inferire qualche cosa di convincente: poichè ponendosi ancora, che l'azione del fluido elastico, che successivamente si sviluppa nell'accensione della polvere contro la palla del cannone, o della molla contro del globo, sia la somma finita di azioni infinite istantanee, e successive, totale successività di azioni certamente non trovasi nel nostro caso. Perchè nei fluidi la pressione non si comunica con successività di tempetti; ma tutta intera esiste in ogni tempo, ed in ogni parte, proporzionale all'altezza del fluido medesimo, ed essa pressione sempre esistendo, sempre tende a produrre il proporzionale suo effetto, ed immediatamente lo produce, quando le si toglie l'ostacolo; e quella azione, che esercita la pressione nel primo istante contro la prima acqua, che esce dal foro, sottrae questa affatto da una seconda, e da una terza, e da ogni altra susseguente, mentre essa prima acqua uscente a niuna resiste, e le azioni susseguenti della pressione non sono maggiori della prima azione, per superarne l'effetto di essa, come farebbe necessario, affine che comporre si potesse una somma delle medesime nella prima acqua, che esce dal foro. Laddove negli addotti esempj, la palla del cannone, ed il globo spinto dalla molla, fanno una positiva resistenza col proprio loro peso, almeno alla forza, che tende a sloggiarli, e porli in movimento, con quale resistenza può darsi qualche tempetto alle azioni susseguenti di unirsi alle prime. Il che non ha luogo nel nostro caso, se pure non vogliasi mettere in conto quella pochissima re-

sistenza, che può farsi dall'aria, e da cui io prescindo. Anzi perchè al primo aprirsi del foro tutte le particelle dell'acqua contenuta nel vaso tendono come possono ad uscire pel medesimo, sono facile a persuadermi, che la prima azione sia appunto maggiore di ogni altra susseguente, mentre ogni azione susseguente resta necessariamente determinata da un certo numero di parti, e da un certo grado di movimento, e la sola convergenza delle direzioni nelle particelle tendenti ad uscire, forma quella elisione nella quantità di moto, che scopresi occularmente nel sito della vena contratta.

- 8 Nella medesima lettera mi suggerisce questo dottissimo Padre di esaminare colle Sperienze, se il getto delle effluenti da vasi sia veramente parabolico; indicandomi la maniera di ciò fare, mediante l'osservazione di due ordinate, e della distanza tra di loro, e dal vertice; ma questa maniera riuscendo incomoda ne' nostri getti grossi, violenti, ed ampi, ci appigliammo ad altra più semplice, comoda, e non meno sicura nelle seguenti Sperienze.

Dalla descrizione della nostra Torre fatta nel primo volume, può osservarsi, che il fondo della Vasca superiore è basso piedi 4., e pollici 4. sotto al centro delle luci nel piano infimo, ed il medesimo è più basso per piedi 14. 4. del centro delle luci nel piano secondo, e piedi 19. 4. più basso del centro delle luci nel piano superiore, e che questo medesimo centro delle luci nel piano superiore è più basso per piedi 5. del ritaglio interiore della Torre, sul quale collocasi una scala verticale divisa in piedi, pollici, e linee, per osservarvi le variazioni di altezza dell'acqua sopra detto ritaglio nel tempo delle Sperienze.

S P E R I E N Z A P R I M A.

Clò premesso, alli 14. Settembre 1769. applicossi nel piano superiore la luce circolare di un pollice di diametro in lastra sottili, lasciossi durare lungamente il getto,

conservandosi intanto inalterabilmente l'acqua alta sopra il centro della luce per piedi 7. o. 6., misurossi l'ampiezza del getto sul piano fondo della Vasca, cioè la distanza orizzontale compresa tra la luce, e quel punto, in cui cadeva il centro della vena, che si trovò di piedi 23., pollici 2. circa, dico circa, perchè il tremore di essa vena potrebbe indurne qualche pollice di svario nella giusta misura dell'ampiezza del getto.

Ora il quadrato dell'ordinata di 23. 2., è di 535. 8., che diviso per l'ascissa di piedi 19. 4. ne dà il parametro della parabola di piedi 27. 8. 4., che esser dovrebbe quadruplo dell'altezza dell'acqua soprastante al foro, che era di piedi 7. o. 6., il cui quadruplo è 28. 2., alquanto maggiore di 27. 8. 4.

S P E R I E N Z A 2.^a

LA stessa luce circolare di un pollice di diametro applicata nel piano di mezzo, avendo sopra di se una stabile altezza di acqua di piedi 12. 1., fece un getto ampio piedi 26. Il quadrato di 26., cioè 676. diviso per l'ascissa 14. 4., ne dà un parametro di piedi 47. 2., il quale per essere quadruplo dell'altezza 12. 1., dovrebbe essere di 48. 4., anche ivi trovasi un piccolo divario.

S P E R I E N Z A 3.^a

LA stessa luce applicata nell'infimo piano, avendo sopra di se una stabile altezza di acqua di piedi 22. 1. 6., ne diede un getto ampio piedi 19. 3., il cui quadrato 370. 7., diviso per l'ascissa di piedi 4. 4. ne dà un parametro di piedi 85. 8., che dovrebbe essere di piedi 88. 6. Qui l'obliquità, e violenza del getto può aver fatta sbagliare di qualche cosa la misura del getto; poichè se si ponga esso getto di piedi 19. 6., troverebbesi il parametro di piedi 88.

Con un tubetto lungo un pollice, e due di diametro nel piano superiore, e colla stabile altezza di acqua di piedi 6. 5. 10., trovossi un getto di piedi 22. 3., il cui quadrato 495. diviso per l'ascissa 19. 4., ne dà un parametro di piedi 25. 6. 7., il quale esser dovrebbe di piedi 25. 11. 4.

Con un tubo dello stesso diametro lungo due pollici, e coll' altezza stabile dell' acqua di piedi 6. 5. 4., ebbesi un getto di piedi 20. 2., il cui quadrato 406. 8. 6. diviso per l' ascissa 19. 4., dà un parametro di piedi 21., il quale dovrebbe essere di piedi 25. 9. 4.

Con un tubo dello stesso diametro lungo tre pollici, e coll' altezza stabile dell' acqua di piedi 6. 8. 3., l' ampiezza del getto fu di piedi 20., il cui quadrato 400. diviso per l' ascissa 19. 4., dà un parametro di piedi 20. 8. 3., il quale dovrebbe essere di piedi 26. 9.

Finalmente con un tubo lungo pollici 14., e coll' altezza stabile dell' acqua di piedi 6. 8. 9., trovossi l' ampiezza del getto di piedi 20., il cui quadrato 400. diviso per 19. 4. dà, come sopra, un parametro di piedi 20. 8. 3., il quale essere dovrebbe di piedi 26. 11.

Dalle quali Sperienze si raccoglie in primo luogo, che i getti fatti da semplici luci intagliate in lastre sottili sono i più lunghi, e se non arrivano alla giusta ordinata della parabola, la cagione può ragionevolmente attribuirsi alla resistenza dell' aria, appunto come nei getti verticali.

Quanto poi ai getti fatti con luci fornite di tubi, o di imburi, questi riescono alquanto più corti per la ragione già altrove addotta, cioè, perchè con essi tubi, od imburi si accresce la massa della effluente, cui dee pure comunicare qualche parte della celerità massima, onde diminuire debbasi la comune; e per la stessa ragione, la vena attualmente misurata trovasi qualche poco maggiore della vena trovata col calcolo, nel quale prendesi per divisore la celerità intera competente alla pressione.

Nel rimanente, se io abbia motivo, o no di pensare, che il principio di natura, di cui per innanzi ragionai, non venga convenientemente adattato alle acque effluenti da vasi, che anzi queste abbiano fino dal bel principio dell'efflusso una celerità finita, e competente alla pressione, astrazion facendo dalla imperfetta fluidità, da qualunque siasi resistenza dell'aria, o dall'adesione alle pareti delle luci, o dei tubi, e dalla impossibilità di aprirgli in un istante, ne lascio volentieri ad altri la decisione; ne saprei conchiudere questo ragionamento in miglior maniera di quella, con cui già lo conchiusi nel più volte mentovato luogo del primo volume, cioè, quanto per me si è detto a questo proposito, ceda a favore della teorica, perchè quanto alla pratica, che è ciò che più rileva, sia esso tempetto istantaneo, o solamente inosservabile, di esso non può farcene verun uso.

DISCORSO III.

Si esamina, se nella costituzione della celerità nelle effluenti da vasi colla pressione concorrevi la ragione delle ampiezze del vaso, e del foro di uscita.

IN una obbligantissima lettera delli 22. Marzo 1768. dirattami dalla celebre Accademia di Bologna, trovai inserito un viglietto del chiarissimo Sig. Dottore Eustachio Zanotti del seguente tenore:

„ In leggendo il libro del Sig. Michelotti non si può che
 „ lodare la esattezza delle esperienze, e l'avvedutezza dello
 „ sperimentatore, che non lascia di esaminare tutte le cir-
 „ costanze, che possono contribuire a rendere diversi gli
 „ effetti: pure se resta qualche desiderio per maggiormente
 „ dilucidare una materia cotanto involuta, pare che esso
 „ nasca per cagione della diversa proporzione tra l'ampiezza
 „ del foro, e la ampiezza, o larghezza del vaso, della
 „ quale

„ quale non si tiene conto come se l'uscita dell'acqua da
 „ un foro dovesse interamente dipendere dall'altezza dell'
 „ acqua sopra il foro, e niente dalla larghezza del corpo
 „ di acqua. Molti celebri autori hanno creduto, che la ve-
 „ locità dell'acqua nell'egresso dalla luce sia eguale alla ve-
 „ locità, che un corpo avrebbe acquistata cadendo dall'al-
 „ tezza della superficie nel caso unicamente, che il foro
 „ potesse riguardarsi come infinitamente piccolo rispetto all'
 „ ampiezza della superficie. Sarà vero, che attesa la gran-
 „ dezza della Vasca, che ha servito alle Sperienze, fosse
 „ tanto maggiore la superficie del fluido della superficie del
 „ foro, che non dovesse la velocità nell'egresso differire
 „ sensibilmente dalla velocità, che si avrebbe, supposta la
 „ Vasca di una capacità infinita. Un tale esame però fatto
 „ sopra diversi fori, che avessero diverse proporzioni colla
 „ larghezza del vaso, potrebbe forse giovare per fare idea
 „ del corso dell'acqua per i canali, e per stabilire con più
 „ sicurezza la scala delle velocità. Se all'acqua, che scorre
 „ per un canale, si vuole applicare la velocità, che si tro-
 „ va avere l'acqua che esce da un foro tenendo conto della
 „ vena contratta, perchè non si dovrà ancora tenere conto
 „ dell'ampiezza del vaso rispetto al foro, la quale propor-
 „ zione essendo d'egualità forse disturba l'applicazione, che
 „ si vuol fare dell'acqua corrente coll'acqua, che esce da un
 „ foro.

La stessa eccezione mi venne pur fatta dal P. Boscovich
 nella sua del 22. Giugno 1767., e da altri uomini in que-
 sta materia peritissimi: non ostante che in iscritto, e in di-
 segno sieno state fedelmente espresse le misure tutte del no-
 stro recipiente, o sia torre, e delle luci adoperate, insieme
 colla maniera, con cui sonosi fatte, e calcolate le Sperienze,
 con le quali cose poteasi schiarire ogni dubbiezza circa co-
 desto punto. Ma il venire ad un simile esame riuscirebbe
 troppo molesto a' leggitori, e per altra parte l'accertamen-
 to di questo punto riputandosi importante. Perciò molto vo-
 lentieri ne intraprendo in questo luogo l'esame desiderosissi-

mo di soddisfare alle giuste dimande di foggetti cotanto ragguardevoli, anzi del pubblico. Il che se non mi rietica, dovrò ingenuamente confessare una ommissione, la quale anche supposta punto non altera la esattezza delle pubblicate Sperienze; e intanto ad altri riuscirà forse quest' affare più felicemente.

- 2 Nella celebre proposizione 36.^a lib. 2., edizione 2.^a dei principj del Newton (*Tav. 1. fig. 2.*), dimostrasi, che conservandosi stabilmente in ab la superficie dell'acqua dalla influente con celerità uniforme, quale acquisterebbe da un grave liberamente cadendo da qualche altezza ih , mentre altrettanta uniformemente ne esce per il foro ef fatto nel fondo di un vaso, dimostrasi dico, che sarà $\overline{ab}^2 = \overline{ef}^2$:

$$\overline{ab}^2 : : hg : ig; \text{ e quindi } ig = \frac{\overline{ab}^2 \times hg}{\overline{ab}^2 - \overline{ef}^2}.$$

Lo stesso, sebbene per altra via dimostra Gio. Bernulli nella sua idraulica, che vanta appoggiata sui meri principj della meccanica, non ostanti le sue obbiezioni a quella del

Newton. Mentre dicendo egli $\overline{ab}^2 = h$, $\overline{ef}^2 = m$; l'altezza

$$hg = a, \text{ ed } ig = z, \text{ ricavasi pure } z = \frac{hb \times a}{bb - mm}, \text{ che}$$

è la stessa del Newton. Lo stesso conchiudono le teorie di Maclaurin, Daniello Bernulli, D'Alembert, e di altri. Quindi s'inferisce, che quando l'area del foro m farà piccolissima rispetto all'ampiezza h del vaso, uscirà l'acqua pel foro ef colla celerità competente ad una libera caduta $= hg$, che diventa $= ig$, perchè in tale supposizione fassi $\frac{hb \times a}{bb - mm} = a$; e perciò $ig = 0$.

- 3 Ora la superficie dell'acqua può conservarsi stabilmente in ab , o per via d'infusione cadendo da qualche altezza, co-

me si suppone da questi autori, oppure col semplice continuo afflusso laterale, siccome accade nelle nostre Sperienze, nelle quali prima che si aprisse il foro di uscita, aspettavasi che la superficie ab fosse affatto quieta e tranquilla; e seguita l'apertura, tenevasi esatto conto delle variazioni di altezza, e dei tempi, in cui facevanfi. Dunque nelle nostre Sperienze i/h potevasi, anzi doveasi riputare $= 0$; e perciò anche l'ampiezza del foro rispetto a quella del vaso h .

4 L'infinità reale della superficie ab non dipende certamente dalla sola figura del recipiente, quando questo sia aperto da un qualche lato, verso cui possa considerarsi come infinitamente esteso. Ad una cotale estensione infinita parmi equivalere il perenne, ed equabile afflusso orizzontale dell'acqua nel recipiente, e quando ancora questo si volesse congiunto con qualche impeto, questo verrebbe incessantemente distrutto dall'urto nelle pareti verticali del recipiente medesimo.

5 Ne' vasi, che successivamente votansi per emissione, deeasi certamente tener conto delle ampiezze del vaso, e del foro, essendo cosa troppo chiara, che più lungo tempo richiedesi a votarsi un vaso più ampio, che un meno ampio per un medesimo foro, se in entrambi uguale sia l'altezza dell'acqua, oppure in vasi uguali a votarsi per un foro angusto, che per uno più ampio; e ciò perchè ad ogni punto dell'altezza corrispondendo un certo grado di celerità, questo conserverassi tanto più lungamente nell'efflusso, quanto più ampio farà il vaso rispetto al foro. Che se il vaso fosse di ampiezza come infinita rispetto al foro, allora il grado di celerità durerebbe infinitamente, e però costante per qualunque tempo finito. Ma nelle nostre Sperienze il difetto di ampiezza infinita nel recipiente incessantemente viene supplito dal continuo, uniforme, ed orizzontale afflusso di altrettanta acqua, quanta ne esce pel foro. Dunque lo stesso grado di celerità conserverassi per qualunque tempo finito nell'efflusso, e sarà il competente all'altezza dell'acqua sopra del foro. Lo stesso dee dirsi degli accrescimenti di celerità nella effluente da' vasi; nei quali uniformemente infondesi maggior

quantità di acqua, di quella, che da principio ne può uscire dal foro: poichè più prettamente alzerassi l'acqua nel vaso più angusto, che nel più ampio, se uguali pongansi i fori, oppure, se i vasi sieno uguali, più presto farannosi gli alzamenti nel vaso, in cui aperto sia un minor foro. In codesti casi adunque, nei quali cercasi la ragione de' tempi per l'esaurimento, o pel riempimento de' vasi, affatto necessaria rendesi la considerazione delle ampiezze del vaso, e del foro; non così dove cercasi la celerità corrispondente ad una semplice pressione: poichè una maggiore ampiezza del foro renderà bensì maggiore la massa effluente, e con ciò farà scemare l'altezza, e la pressione, e conseguentemente la celerità, ben lungi dallo accrescerla.

- 6 Consideriamo ancora la supposizione, che da questi gran maestri si fa, cioè, che la superficie dell'acqua sia affetta di una celerità, che acquisterebbe da un grave liberamente caduto dall'altezza $i h$. Ora io dico, o che essa superficie continua il primo suo moto con successivo acquisto di celerità, oppure che ivi giunta perde quella, di cui si suppone affetta; ma nel caso del vaso costantemente pieno la superficie $a b$ non discende, dunque per nulla dee computarsi la sua velocità precedente, di fatto ella ad altro non serve, che a somministrare la quantità di acqua necessaria per conservarla nello stesso sito, dove le particelle dell'acqua, che la compongono in forza della loro propria gravità cominciano un moto di discesa, modificato dalle circostanze, che nulla ha di comune col primo. Il che può ancora più chiaramente spiegarsi in quest'altra maniera: se in un vaso prismatico, o cilindrico infondasi uniformemente una medesima quantità di acqua, è chiaro, che da qualunque altezza ella caggia, in tempi uguali farà sempre alzamenti uguali nel vaso. La maggiore, o minore discesa nulla turbando l'uguaglianza degli alzamenti: perchè ogni di lei empito rimane affatto annientato dalla insuperabile resistenza del fondo; onde al più ne seguano ondeggiamenti, e vortici nell'acqua già caduta, per quali non si accresce la di lei pressione,

siccome non ne accrescono la gravità, che tutta e sempre ne viene dal fondo sostenuta, e dalle pareti del vaso. La di lei pressione solamente si accresce coll' accrescersi le altezze. Quindi, se verso il fondo siavi un' apertura, per cui l'acqua escir ne possa, la celerità dell' effluente dipende solamente dalla pressione, o dicasi dall' altezza dell' acqua sopra del foro: purchè l' influente non caggia perpendicolarmente sul foro medesimo, talchè si faccia una discesa continuata, e non già totalmente interrotta. Dunque l' altezza ih , da cui supponesi cadere da principio l' influente, non farà altro, che imprimerle quella celerità, con cui accorrere possa in quella quantità, che è necessaria alla conservazione di una stabile altezza di acqua nel vaso, e quindi ad una costante celerità dell' efflusso.

- 7 Facciamo qui una importante riflessione sopra il Teorema del n. X. dell' Idraulica di Gio. Bernulli, ove leggesi *dico velocitatem effluentis (si illa nascatur ex quiete) convergere citissime ad eam, quae acquiritur a gravi libere cadente per altitudinem* $= \frac{bb \times a}{bb - mm}$. E nel Corollario secondo dello stesso Teorema inferisce, che quanto più crescerà m rispetto ad h , farassi tanto maggiore la celerità: di sorta che divenendo $m = h$ cioè l' ampiezza del foro facendosi uguale all' ampiezza del vaso, diventa infinita la frazione $\frac{bb}{bb - mm}$, perchè $= \frac{bb}{0}$; e quindi infinita la velocità corrispondente all' altezza infinita $\frac{bb \times a}{0}$. Il che è verissimo, se di mano in mano, che va crescendo m , cresca ancora la quantità influente in una ragione non minore della composta da m , e dalla velocità competente alla sempre nuova altezza; ma la faccenda va tutt' altrimenti, quando l' influente, e l' effluente debbano essere sempre uguali ad una data quantità: chiarissima cosa essendo, che coll' accrescersi l' ampiezza del foro m , dovrà diminuirsi l' altezza del fluido, acciò sempre scarichi per m la quantità data. Di maniera che diventando infinita

la frazione $\frac{bb}{bb-mm}$ quando $h = m$, allora l'altezza a farassi infinitamente piccola, acciocchè sia $\frac{bb}{0} \times a$ quantità finita; e perciò finita la velocità ad essa corrispondente.

A maggior chiarezza del detto fin qui: la quantità data influente, ed effluente dicasi $= q$. In ogni caso dovrà sempre essere $m \times \sqrt{\frac{bba}{bb-mm}} = q$, prendendosi ancora m per l'area della vena sommamente ristretta; e nel caso di $m = h$, dovrà pure essere $m \times \sqrt{\frac{bba}{0}} = q$, oppure $\frac{mb}{0} \sqrt{a} = q$. Il che può farsi in due maniere, la prima quando la superficie suprema del fluido sarà infinitamente grande, ed infinitamente piccola l'altezza a ; l'altra, quando la superficie suprema del fluido essendo finita, e circonscritta dalle pareti del recipiente, verrà affetta della celerità finita $= \frac{q}{m}$; e quindi finita sia l'altezza capace a produrla. Dunque in questo caso non regge la formola, perchè al variarsi di m , non solamente varia l'altezza $\frac{bba}{bb-mm}$ generatrice pretesa della celerità uniforme dell'efflusso; ma tutto insieme varia l'altezza a del fluido sopra del foro.

In oltre se fosse generalmente vero, che la celerità dell'efflusso uniforme debba sempre corrispondere ad un'altezza $\frac{bba}{bb-mm}$ dove a sia invariabile; ciò dovrebbe verificarsi anche nel caso, in cui gli efflussi uniformi per luci disuguali M, m dovessero essere uguali, e quindi le celerità reciproche alle medesime M, m , di sorta che $M \times \sqrt{\frac{bba}{bb-MM}} = m \times \sqrt{\frac{bba}{bb-mm}}$; e quadrando le parti $M^2 \times \frac{bba}{bb-MM} = m^2 \times \frac{bba}{bb-mm}$, ed $M^2 \times hh - mm = M^2 \times hh - MM$, ed ancora $M^2 : m^2 :: hh - MM : hh - mm$. Cioè se M sia maggiore, a mi-

nore di m , dovrà essere $hh - MM$ maggiore, o minore ³¹ di $hh - mm$. Dunque nella fatta, e possibile supposizione, scopresi evidentemente impossibile codeffa legge della celerità corrispondente ad un' altezza $\frac{bbs}{bb-mm}$, dove a sia invariabile.

- 8 Nel Coroll. 1. n. XII., notinsi quelle parole *hoc quippe in casu* (cioè di h infinito rispetto ad m). *Vas considerari potest tanquam semper plenum*, quia ob vasis quasi infinitam amplitudinem, respectu habito ad tubi angustiam, requireretur utique tempus infinitum, antequam in illo descendat aqua sensibiliter. Dunque e converso, dico io, in vase semper pleno amplitudo vasis considerari potest tanquam infinita, quia ob permanentem vasis plenitudinem, requiritur utique tempus infinitum, antequam in illo descendat aqua sensibiliter. Dunque l' effetto nell' uno, e nell' altro caso essendo lo stesso, le loro cause sono equipollenti.

A questo proposito soggiugnere potrei, che la ragione dell' altezza del fluido al diametro del foro aver dee assai più parte nell' efflusso, che non l' ampiezza del recipiente. In fatti comunque ampio sia esso recipiente, se l' altezza del fluido non abbia una certa ragione col diametro del foro, l' effluente non empierà esso foro, ma formerà nel suo mezzo un voto, il quale dimostra nulla contribuire l' ampiezza del vaso alla celerità dell' efflusso, mentre all' opposto molto vi contribuisce quella dell' altezza del fluido al diametro del foro. Veggasi la dimostrazione di questo, e le sperienze del Sig. Belidor nella sua architettura idraulica tom. 1. pag. 217. n. 529. 530. 531.

- 9 Dopo codeffo qualunque siasi ragionamento vorrebbeffi assicurato questo punto colle sperienze ancora: ma dimando io nelle sperienze dove dovrà defumerfi l' ampiezza del vaso, quando fosse irregolare? dirassi certamente, che dalla suprema, e stabile superficie del fluido: perchè ivi cominciano le pressioni tutte, e da essa dipende ogni variazione dell' efflusso, ed ivi concordemente prendesi dagli scrittori: dunque sarà vero, che da essa superficie in giù, nulla avrà che

fare la varia figura, od ampiezza di esso vaso. Ciò posto:

Dalla descrizione della nostra macchina, come si disse al n. 66. vol. 1., risulta cotale superficie, comprendendosi quella dell'introduttore, essere maggiore di piedi 133. e mezzo, e la superficie della massima luce adoperata nelle Sperienze del primo volume, essere di pollici quadrati 9., o sia un decimosesto di piede quadrato; e la maggiore delle luci, dirò così, virtuali, o sia delle armate di imbuto cicloidale, essere di pollici quadrati 14. ed un sesto. Poniamole solamente di un ottavo di piede quadrato: sarà la ragione tra la suddetta superficie, e la massima luce adoperata in queste Sperienze, come 133. e mezzo ad un ottavo, o in numeri interi, come 1068. all'unità. Quindi giusta la formola del Bernulli $h : m :: 1068 : 1.$, ed $h h : m m :: 1140624 : 1.$; conseguentemente tutta l'altezza ig verso la hg , come 1140624.: 1140623.; ma escludiamo, se così ne piace, da questi computi la superficie dello introduttore, la quale nello aprirsi delle grandi luci dovea qualche poco inclinarsi verso la Torre; e pigliamo la sola superficie dell'acqua circonscritta dalle pareti della Torre sopra il noto ritaglio, di cui mantenevasi sempre molto più elevata. Essa superficie sarà solamente di piedi quadrati 13. e quattro noni; e però ad un ottavo di piede quadrato starà come 968. al 9., oppure come 107.: 1., e però l'altezza tutta ig alla hg , starà come 11449. al 11448. Dal che ad evidenza si raccoglie, che, anche supposta accurata la Teoria del Newton, e del Bernulli, non è possibile l'accertarsi colle Sperienze sopra differenze cotanto insensibili, conseguentemente sono fuori di ogni ragionevole sospetto le nostre. Al che riflettendo il Signor Eutachio Zanotti avvedutamente soggiugne nel citato tuo viglietto „Sarà forse vero, che attesa la grandezza della „Vasca, che ha servito alle Sperienze, fosse tanto maggiore la superficie del fluido della superficie del foro, che „non dovesse la velocità nell'egresso differire sensibilmente „dalla velocità, che si avrebbe, supposta la Vasca di una „ampiezza infinita. „

Ripi-

10 Ripigliarassi: paragonandosi insieme sperienze fatte con recipienti, e luci assai fra loro diverse forse scoprirassi qualche sensibile alterazione nella legge delle celerità, corrispondenti a diverse altezze, ed io replico, che fino a tanto che nelle sperienze si defumeranno le celerità da un'altezza stabile dell'acqua, non dee trovarsi mai veruna alterazione nella detta legge delle celerità. La cosa parmi già assai dimostrata da quanto sopra si è detto: tuttavia per una più ampia soddisfazione di chiunque ne apporteremo ivi alcune tanto delle già pubblicate, quanto altre nuove fatte a bella posta, e poichè una medesima cosa è il variare l'ampiezza del recipiente, ritenendo quelle de' fori, od il ritenere l'ampiezza del recipiente; ed il variare queste: essendo a noi assai più facile questo secondo; di questo genere sono le seguenti sperienze.

S P E R I E N Z A P R I M A.

Prendasi in primo luogo la 17.^a del primo volume fatta con luce quadrata di tre pollici di lato, la cui area però era di pollici quadrati 9. 0. 1. 6., come notossi al numero 68.; e questa si paragoni con la 118.^a fatta con luce circolare di un pollice di diametro, la cui area trovasi di pollici quadrati 0. 9. 5. 2., di sorta che ivi la ragione delle luci sia come 7785. al 679., o come 11. 5. 7. all'unità.

Ambedue codeste sperienze furono fatte al secondo piano, l'altezza dell'acqua per la prima essendo di piedi 11. 9. 0. 6., e per la seconda di piedi 11. 8. 10. 10., cioè sensibilmente uguali, e tali pure le celerità ad esse corrispondenti, cioè di piedi 16. 6. 8., e di piedi 16. 6. 7. 3. per minuto secondo. Le dispenfe fatte in un minuto primo sono di piedi cubici 61. 2. 6. 6. per la luce maggiore, e di piedi cubici 5. 4. 9. 11. per la minore.

Dividendosi queste dispenfe per le aree delle rispettive luci, hannosi le celerità effettive, cioè $\frac{61.2.6.6.}{11.5.7.}$, e $\frac{5.4.9.11.}{1.}$,

E

quali sono come 61. 2. 6. 6. al 61. 11. 3., mentre le desunte dalla semplice pressione sono 26. 6. 8., e 26. 6. 7. 3.

Dividendo la dispensa 61. 2. 6. 6. della luce maggiore per la dispensa 5. 4. 9. 11. della minore, trovasi di quoziente 11. 3. 11. 7.; e dividendo 7785. per 679., quai numeri esprimono la ragione delle luci, trovasi di quoziente 11. 5. 7. Onde le dispenfe sono sensibilmente come le aree delle luci, e le celerità sensibilmente uguali, come lo sono le pressioni, non ostante il grande divario fra le luci.

S P E R I E N Z A 2.^a

PREndansi le sperienze 54.^a, 55.^a, 56.^a fatte nell' infimo piano con luce quadrata fornita col maggiore imbuto cicloidale, ove sonosi trovate le vene di pollici quadrati 8. 8. 2. 6., 8. 8. 4. 8., 8. 8. 5. 6., onde la media facciasi di 8. 8. 4. 2.; ponendosi costante la ragione tra le aree delle luci similmente applicate, e delle loro vene sommamente contratte, cioè come 432. al 265., trovasi che la vena media 8. 8. 4. 2., corrisponde ad una luce quadrata semplice di pollici quadrati 14. 2. 1., la sua dispensa in un minuto primo di piedi cubici 130. 6. 5. 8., l'altezza dell'acqua di piedi 21. 7. 7. 3., la celerità ad essa corrispondente di piedi 36. 0. 4. per secondo. Per altra parte prendansi le sperienze 123.^a, 124.^a, 125.^a fatte allo stesso infimo piano con luce quadrata di un pollice in lastra sottile. La dispensa media per un minuto primo è di piedi cubici 9. 1. 4. 7.; l'altezza dell'acqua di piedi 21. 9. 8. 10., cui corrisponde la celerità di piedi 36. 2. 1. 3. per secondo. Ivi le aree delle luci sono 14. 2. 1., ed 1., per le quali dividendosi le rispettive dispenfe, hannosi le celerità effettive = $\frac{130.6.5.8.}{14.2.1.}$, e $\frac{9.1.4.7.}{1.}$, che sono come 130. 5. 6. 8. al 129. 2. 4. 0. 6. &c., dove la prima è alquanto maggiore della seconda, mentre delle celerità desunte dalla semplice pressione la prima di piedi 36. 0. 4. è alquanto minore della seconda 36. 2. 1. 3.

IN terzo luogo prendendosi la suddetta luce di pollici 14. 2. 1. colla sua dispensa in un minuto primo di piedi cubici 130. 6. 5. 8. al piano infimo; e per altra parte prendendosi la Sperienza 110.^a fatta nel piano superiore con luce circolare di un pollice in lastra sottile, e la sua dispensa in un minuto primo di piedi cubici 4. 1. 5. 8. Ivi la ragione delle luci si è quella di 14. 2. 1. al 0. 9. 5. 2., od in numeri interi, quella di 12246. al 679., cioè poco più di 18. all'1. Quindi le celerità effettive saranno come $\frac{130\ 6\ 5\ 8.}{14\ 2\ 1.}$

al $\frac{4\ 1\ 5\ 8.}{1.}$, o sia come 130. 6. 5. 8. X 0. 9. 5. 2. all' 1. 5. 8.

X 14. 2. 1., cioè come 102. 7. 0. 8. al 58. 5. 2. 4. 9. Dividendo l'antecedente pel conseguente, trovasi il quoziente di 1. 9. 0. 9. &c.; e dividendo similmente l'una per l'altra le celerità desunte dalle semplici pressioni, cioè 36. 0. 4. per 20. 3. 10., trovasi il quoziente 1. 9. 3. 3. &c. appena sensibilmente maggiore di 1. 9. 0. 9., non ostante, che le luci sieno fra di loro in ragion maggiore di 18. all'1.

S P E R I E N Z A 4.^a

Nell'anno 1768. si preparò un nuovo lastrone da applicarsi ai finestrini della Torre, con una luce circolare di sei pollici di diametro, con cui si fecero le seguenti sperienze nel piano superiore.

1.^a Alli 27. Settembre avendosi sopra il centro della luce una altezza di acqua di piedi 6. 8. 1., cui compete una celerità di piedi 20. 0. 1. per minuto secondo, nel tempo di dieci minuti primi scaricaronsi nelle Vascche piedi cubici 1456. 9. 6., quindi per ogni minuto secondo piedi cubici 2. 5. 1. 7. 6., i quali divisi per la celerità suddetta 20. 0. 1., danno la vena di pollici quadrati 17. 5. 8.

E 2.

Replicata la speriencia coll' altezza di piedi 6. 5. 4., cui compete una celerità di piedi 19. 8. 0. per minuto secondo, nel tempo di minuti primi 9. 30", scaricaronsi nelle Vasche piedi cubici 1362., e però per ogni minuto secondo piedi cubici 2. 4. 8., che divisi per la celerità di piedi 19. 8. 0., danno la vena di pollici quadrati 17. 5. 10.

Replicata la terza volta la speriencia sotto un' altezza di acqua di piedi 6. 5. 10., cui compete una celerità di piedi 19. 8. 8. 8. per minuto secondo; nel tempo di minuti primi 9. 30", scaricaronsi nelle Vasche piedi cubici 1373. 10., e quindi per ogni minuto secondo piedi cubici 2. 4. 11.; che divisi per 19. 8. 8. 8., danno la vena di pollici quadrati 17. 7. 0.

- II E perchè in queste, e molto più nelle seguenti sperienze, accorreva l'acqua dall' introduttore nella Torre con qualche empito, per cui formavansi nella suprema superficie vortici, ed irregolarissimi moti, a cagione della cadente, e continue ripercussioni nelle pareti della Torre, a fine di determinare anche in questo caso la pressione conveniente, la quale sopra la consueta scala osservare non poteasi con sicurezza, si prese il seguente spediente, che giovar potrebbe in somiglianti casi. In un angolo della Torre si fermò un tubo di lata lungo piedi 6. col diametro di tre pollici, acciò la sua estremità inferiore si trovasse lontana dal partecipare dei movimenti irregolari della superficie, i quali eziandio per diminuire nel tubo, non si lasciò al di lui fondo, che una piccola apertura di circa mezzo pollice, colicchè l'acqua introducendosi altra direzione avere non potesse, che la verticale. Nel tubo introducevasi una cannuccia divisa al solito in piedi, pollici, e linee, la estremità inferiore di questa era fissa in un pezzo di suvero, che sosteneva l'acqua, e la sua estremità superiore passava per un occhio, o anello fisso nella sommità del tubo, per cui mantenevasi sensibilmente nella direzione verticale. Sopra codesta cannuccia, soggetta appena a qualche piccola vibrazione verticale, osservavansi gli abbassamenti, od alzamenti dell'acqua, il che al-

trimenti sarebbe stato troppo difficile a farsi colla dovuta diligenza, ed acciò cadesse ancora da maggior altezza l'influente, se ne diminuì alcuna volta la quantità, di modo che la superficie dell'acqua si stabilisse più bassa del solito ritaglio interiore della Torre; osservandosi intanto lungamente le vibrazioni della cannuccia, le quali rendevansi quasi insensibili, quando la pressione, o dicasi l'altezza dell'acqua erasi ridotta ad essere permanente. Nel tempo delle suddette sperienze osservossi pure colla possibile diligenza la contrazione della vena, mediante una specie di compasso della invenzione del Sig. Architetto Giulio, e trovossi che il diametro della vena era circa linee 38., quella data dal calcolo sarebbe di linee 36. e mezza, la sua distanza dalla luce era circa linee 30. Dico circa, perchè, come dissi altrove, egli è difficilissimo, e forse impossibile il fare somiglianti osservazioni coll'ultima esattezza, a cagione del sensibilissimo tremore, ed increspamento della vena medesima. Il che fu pur anche osservato dagl' Illustrissimi Signori Professori di Matematica Conte Sratco della Università di Padova, Dottore Pittoi della Università di Siena, e Dottore Ignazio Somis Professore di Medicina teorica in questa di Torino li 10. Ottobre del detto anno 1768., in qual giorno si compiacquero di assistere a varie altre sperienze.

S P E R I E N Z A 5.^a

DOpo ciò armossi la suddetta luce circolare d'imbuto cilindrale della forma descritta al n. 90. del primo volume, cioè col diametro anteriore di linee 84., coll'esteriore di 72., e di lunghezza linee 32.; nella prima sperienza fatta li 27. Settembre avendosi sopra il centro della luce un'altezza di piedi 6. 8. 2., cui corrisponde la celerità di piedi 20. 0. 2. per minuto secondo; nel tempo di minuti primi 65. 19." scaricaronsi nelle Vasche piedi cubici 1333. 3. 6.; e però per ogni minuto secondo piedi cubici

3. 6. 2. 8., che divisi per la celerità 20. 0. 2., danno la vena di pollici quadrati 25. 3. 9.

Replicossi alli 18. Settembre questo sperimento sotto una altezza di piedi 6. 8. 4. 3., cui compete la celerità di piedi 20. 0. 6. 4.; e nel tempo di sette minuti primi si scaricarono nelle Vasche piedi cubici 1497. 4. 4. 8., e però per ogni minuto secondo, piedi cubici 3. 6. 9. 4. 7., onde trovasi la vena di pollici quadrati 25. 7. 3.

Replicato nello stesso giorno lo sperimento, sotto un' altezza di acqua di piedi 6. 8. 11. 10., cui compete la celerità di piedi 20. 1. 5. 8. per minuto secondo; nel tempo di minuti primi 6. 30" si scaricarono nelle Vasche piedi cubici 1419. 0. 9.; che danno per minuto secondo piedi cubici 3. 7. 7. 11., onde trovasi la vena di pollici quadrati 26. 0. 5. 6.

Osservandosi qui, che l'aumento fatto dall'imbuto non era proporzionale a quello di un simile imbuto adattato ad una luce circolare di tre pollici di diametro, che nell'anno scorso giunse a darci una vena di pollici quadrati 6. 11.; onde a proporzione in questo dovea farsi di pollici quadrati 27. 8. circa, mentre di fatto stentò a darne pollici quadrati 26., si scorse di quattro linee esso imbuto, e si fecero le seguenti sperienze.

Alli 4. Ottobre, sotto un' altezza di piedi 6. 7. 2. 6., cui compete una celerità di piedi 19. 10. 9.; nel tempo di minuti primi 6. 30" si scaricarono nelle Vasche piedi cubici di acqua 1384. 1. 2. 4., che danno per ogni minuto secondo piedi cubici 3. 6. 7.; e quindi la vena di pollici quadrati 25. 8. 2.

Replicato nello stesso giorno lo sperimento sotto un' altezza di acqua di piedi 6. 8. 10., cui compete la celerità di piedi 20. 1. 2. per minuto secondo; nel tempo di minuti primi 3. si scaricarono nella sola Vasca superiore piedi cubici 655., che danno per ogni minuto secondo piedi cubici 3. 7. 8.; onde trovasi la vena di pollici quadrati 26. 0. 10.

Replicato la terza volta, sotto un' altezza uguale alla precedente di piedi 6. 8. 10., e colla stessa celerità di piedi

10. 1. 2.; nel tempo di tre minuti primi scaricaronsi nella Vasca superiore piedi cubici 655. 3., e per ogni minuto secondo piedi cubici 3. 7. 8.; onde trovasi la vena di pollici quadrati 16. 1. 0.

Alli 17. e 18. Ottobre del 1769. replicato per tre volte lo sperimento, trovaronsi le vene di pollici quadrati 16. 2. 0., 16. 1. 6., 16. 0. 0., ed essendosi rinnovata la sperienza con imbuto simile adattato ad una luce circolare di tre pollici di diametro nel piano infimo, si trovarono le vene di pollici quadrati 6. 11. 6., 6. 10. 10. 4., 6. 10. 11., con insensibile divario dalle ritrovate nel 1767. Ma per non allontanarci dal principale soggetto della presente quistione, esamineremo in fine, onde procedere possa questa improporzione tra l'area della luce, e quella della vena dataci dall'imbuto.

S P E R I E N Z A 6.^a

Osserviamo pertanto, che l'area della semplice luce circolare di sei pollici di diametro è trentasei volte maggiore dell'area di quella di un solo pollice di diametro, ed ancora la vena media di quella, cioè pollici 17. 6. 1. è trentasei volte maggiore della vena di questa, di pollici 0. 5. 10. 3. In oltre la vena effettiva dell'imbuto trovata in queste sperienze a quella della luce semplice è come 16. 1. al 17. 6. 2., od in numeri interi, come 3656. al 3379. Quindi la vena di codesto imbuto a quella della semplice luce circolare di un pollice di diametro, sarà come 3658. X 36. al 3379. X 1., cioè come 131616. al 3379., o prossimamente, come 55. ed un terzo all' 1.

Tanta inuguaglianza di luci, o di vene sembra pure, che alterar dovesse sensibilmente la ragione delle celerità desunte dalla semplice pressione, vediamolo. Prendansi di ciascuna le portate in un minuto primo sotto le proprie loro altezze; e per codesto imbuto sarà di piedi cubici 218. 8. sotto un'altezza di piedi 6. 8. 10.; e per la semplice luce cir-

colare di un pollice farà di piedi cubici 4. 1. 5. 7. sotto un' altezza di piedi 11. 8. 11. 10., e di piedi cubici 7. 4. 10. 10. 8. sotto un' altezza di piedi 12. 0. 2. 6.

La celerità effettiva pel grande imbuto farà $\frac{218.8.}{pol. quad. 26.1.}$, e per la semplice luce circolare di un pollice nei tre diversi piani farà piedi cubici $\frac{4.1.5.7.}{pol. quad. 0.5.10.3.}$, $\frac{5.4.10.}{0.5.10.3.}$, $\frac{7.4.10.11.}{0.5.10.3.}$.

Quanto a queste tre la cosa è abbastanza certa; cioè che le loro celerità corrispondenti sono nella ragione sudduplicata delle rispettive pressioni.

Resta a vederli, se la celerità $\frac{218.8.}{26.1.}$ notabilmente differisca da alcuna di queste. Paragoniamo pertanto in primo luogo $\frac{4.1.5.7.}{0.5.10.3.}$, e $\frac{218.8.}{26.1.}$ con $\sqrt{6.8.10.}$, e $\sqrt{6.10.7.}$, o sia $\sqrt{970.}$ con $\sqrt{991.}$, o prossimamente in numeri interi 3114. con 3148. Moltiplicando i numeratori delle due frazioni reciprocamente per i loro denominatori, a fine di togliere le espressioni in rotti, esse fanno 8. 10. 2. 2. 6., e 8. 11. 6. 2. 7. 7.; e dividendo 3114. per 3148., ed ancora 8. 10. 2. 2. 6. per 8. 11. 6. 2. 7. 7., cioè gli antecedenti per i conseguenti, trovansi quozienti sensibilmente uguali 1. 0. 1. 6., e 1. 0. 1. 9. &c. non ostanti le radicali, ed i molti giri del computo.

Nella stessa maniera paragonando le celerità $\frac{218.1.}{26.1.}$, e $\frac{5.4.10.}{0.5.10.3.}$ con $\sqrt{6.8.10.}$, e $\sqrt{11.8.11.10.}$, o sia in interi il 1075. col 1421., trovansi sensibilmente uguali i quozienti 1. 3. 11., e 1. 3. 10. 4.

Così pure paragonando $\frac{218.8.}{26.1.}$, e $\frac{7.4.10.11.}{0.5.10.3.}$ con $\sqrt{6.8.10.}$, e $\sqrt{12.0.2.6.}$, o sia 1078. con 1955., trovansi i quozienti 1. 9. 10., 1. 9. 9.

Dirassi,

Dirassi, che codeste celerità riescono così appunto, perchè in queste sperienze l'ampiezza del vaso è sempre molto maggiore di quella delle luci, comunque fra di loro disugualissime; ed io replico, che codeste celerità, e tutte quelle, che troverannosi nelle sperienze fatte in somigliante maniera, deggiono così ritrovarsi: perchè in esse la superficie suprema, e permanente dell'acqua, qualunque siasi l'ampiezza, o la figura del vaso, avrà sempre una ragione come infinita a qualunque finita ampiezza del foro, e perciò la celerità della effluente dipenderà unicamente dall'altezza stabile dell'acqua sopra il foro di uscita.

- 12 Nel soprariferito biglietto del Sig. Dottore Eustachio Zannotti obiettafi pure il caso del vaso senza fondo, o sia del foro uguale alla capacità del vaso. Cotale obbiezione svanisce tosto, quando nelle sperienze si pone stabile l'altezza dell'acqua: perchè in tal caso, la suprema permanente superficie dell'acqua sarà sempre come infinita rispetto alla grandezza finita del foro, supplendo alla infinità reale di detta superficie l'incessante, ed equabile afflusso dell'acqua, che stabilmente la conserva nella sua prima grandezza, e posizione, e però dico ivi, come già dissi a questo proposito nel precedente ragionamento, che il caso del vaso senza fondo è tutt'altro da quello, di cui qui si tratta, e senza ridire le stesse cose accennerò solamente questa essenziale differenza, qual'è, che nel vaso senza fondo non può mai farsi pressione alcuna stabile per un tempo finito, nè veruna celerità uniforme per alcuno spazio finito, come sempre si suppone nella presente quistione. Imperciocchè nel vaso senza fondo dovrebbero infondere una quantità di acqua infinita, acciò in esso fare si potesse alcuna altezza, o pressione stabile, e da questa una equabile celerità per qualche spazio finito. Conseguentemente alla quale infallibile verità, quanto più vorrassi la superficie della luce vicina ad eguagliare quella superiore, e permanente dell'acqua, tanto più avvicinerannosi all'impossibilità cotali sperienze; laddove sempre possibili sono, quando le cose talmente sono disposte, che l'influente:

equabile conserva nella medesima grandezza, e situazione la superficie dell'acqua nel recipiente; e quindi equabile l'efflusso, la cui celerità non dipenderà, che dalla sola altezza dell'acqua sopra del foro.

Nel supposto poi d'una influente, ed effluente costante la maggiore, o minore ampiezza del foro di uscita farà bensì, che si conservi l'acqua in minore, od in maggiore altezza sopra di esso nel recipiente; e con ciò farassi necessariamente minore, o maggiore la celerità dell'efflusso; ma indipendentemente da ogni ragione di ampiezza tra il vaso, ed il foro di uscita. Infatti egualmente nel vaso ampio, che nell'angusto dovrà introdursi uniformemente la medesima quantità di acqua uguale alla effluente uniforme, acciò stabile si mantenga l'altezza medesima, e stabile la medesima superficie dell'acqua nel recipiente, da cui dipende l'uniforme celerità dell'efflusso.

Dopo ciò parmi, che punto turbata non venga l'applicazione delle effluenti da' vasi alle correnti per i canali. Che se in queste si vuole, che abbia luogo la ragione della luce alla sua vena contratta, ciò è solamente, quando nella stessa maniera, che per le effluenti da' vasi, voglionsi determinare le quantità decorrenti per i canali; cioè quando nel computo adoprafi la celerità massima, la quale certamente non compete a tutti i punti della medesima luce, o sezione; non già quando nel computo adoprafi la celerità media, o comune per tutta la luce, o per tutta la sezione, siccome dimostrano diverse sperienze del primo volume, e più chiaramente quelle di questo secondo.

- 13 Rimane ora a considerarsi la sopracennata improporzione di vena riconosciutasi nelle sperienze fatte con l'imbuto cicloidale, applicato alla luce circolare di sei pollici di diametro. Mentre in altre fatte con simile imbuto applicato a luci minori, e particolarmente alla circolare di tre poll. di diametro, trovossi replicatamente una vena maggiore di poll. quadr. 6. 11. Onde a proporzione di grandezza, e somiglianza, quella di codetto imbuto essere dovrebbe maggiore di pollici quadrati 27. 8., quando infatti appena essa giunse a pollici 26. 1.

Dopo avere diligentemente esaminato tanto le misure, che la figura dell'imbuto, ed altre circostanze, una sola ne parve capace a produrre una tanta diminuzione, qual'è, che l'orifizio interiore degl'imbuto simili, molto minori di questo, poteasi considerare, che ricevesse l'acqua immediatamente dal recipiente, stante l'ampiezza del finestrino, o buco rispetto a quella del loro orifizio. Non così in questo, il quale per la sua grandezza ne obbligò ad ampliare per un tratto il finestrino medesimo, quantunque scavato nel vivo sasso. Ivi l'acqua del recipiente soffrire dovea una prima resistenza nello ingresso del buco, ed un'altra nel percorrerne la lunghezza, stanti le scabrosità delle interne sue pareti non affatto lisce; la medesima urtando poscia nel labbro, e negli angoli mistilinei dell'orifizio interiore dello imbuto, veniva rattenuta, rispinta, ed obbligata a' movimenti retrogradi, e variamente riflessi, con che ritardare dovea quella, che drittamente incamminavasi al medesimo orifizio interiore dell'imbuto, in cui entrando con sensibile detrimento della naturale velocità, dovea col medesimo uscire dall'orifizio esteriore. Ciò che verisimilmente accaduto non sarebbe, se si fosse potuto applicare detto orifizio interiore in maniera, che immediatamente ricevesse l'acqua dal recipiente.

24. Ma con ciò pare torni in campo tutta intera la quistione, e pigli nuovo vigore nella costituzione della celerità dell'effluente da' vasi la ragione delle ampiezze del recipiente, e del foro di uscita, scoprendosi ivi assai sensibile l'improporzione di vena tra due imbuto simili, e similmente applicati, de' quali l'uno è quadruplo dell'altro. Per chiarirsi della verità, veggasi, se da questa osservazione possa inferirsi, che sia stata maggiore la celerità per la luce quadrupla posta sotto uguale pressione, che per la luce semplice, siccome vuole la formola $V = \sqrt{\frac{bb\ a}{bb-mm}}$.

Questo punto già è stato diffusamente esaminato, quando h esprime la capacità del recipiente, o sia della Torre: solamente si può aggiugnere, che se dividendosi le dispense ef-

fettive per le velocità corrispondenti alle semplici pressioni, trovansi vene alquanto minori delle attualmente misurate, onde cotali celerità sieno alquanto minori delle effettive. Dunque, se le dispende medie si dividessero per velocità maggiori delle corrispondenti alle semplici pressioni, come sono le corrispondenti alla formola $V = \sqrt{\frac{hba}{bb-mm}}$ si trove-

verebbero vene vieminori; e però più lontane ancora dalle attuali, e tanto più lontane, dove le luci sono fornite di tubi, o d'imbuti, come nel presente caso: perchè in somiglianti casi non iscopresi sensibile contrazione di vena.

- 15 Vediamo ora cosa seguirebbe, quando h ne rappresentasse la capacità del buco attraversante la muraglia del recipiente, quale capacità si è quella di un parallelepipedo orizzontale largo, ed alto pollici otto, lungo pollici 27. Onde, se detta capacità si voglia considerare come un recipiente, in cui uniformemente entra una medesima quantità di acqua, che ne lo conserva pieno, ed al fondo del quale vengono applicate luci di grandezza diversa; e perciò detta capacità si dica $= h$, e l'altezza a del fluido sia per le diverse luci la stessa, cioè di piedi 6. 8. sopra il loro centro. In primo luogo considerando la capacità del buco h affatto libera per tutta la sua lunghezza, farà come un recipiente senza fondo, ma orizzontale, o più veramente un tubo quadrangolare, la cui vena trovasi per il capo primo della seguente parte seconda n. 2., facendo come 3348. al 4470. circa, così pollici quadrati 39. ed un nono, che costituiscono la vena di una luce di pollici quadrati 64. a pollici quadrati 32. 4. circa, o dicanti pollici superficiali del piede quadrato 0. 4. 4. 4., i quali moltiplicati per piedi 20., che sono la celerità corrispondente ad una pressione di piedi 6. 8., danno una dispensa di piedi cubici 7. 3. 2. 8. per minuto secondo, la quale è appunto doppia della dispensa effettiva dataci dal grande imbuto di piedi 3. 7. 8., siccome la vena di pollici quadrati 32. 4. è doppia della vena di esso imbuto, trovata di pollici quadrati 26. 1.; onde uguali trovanti le

45

celerità corrispondenti a pressioni uguali, non ostante che una luce sia doppia dell'altra, e compensate le resistenze al movimento dell'acqua.

Non altro poi, che assurdi seguono, se le celerità voglianti desumere dalla suddetta formola, dicendosi h la detta capacità del buco; cioè considerata come recipiente comune alle diverse luci nel suo fondo applicate: perchè per il buco

affatto libero fassi $\frac{b h a}{b b - m m}$ infinito, essendo $m = h$, e però infinito $\frac{b h a}{0}$, ed infinita la celerità, che gli corrisponde, e

per l'imbuto farebbe $\frac{774 \times a}{605}$, maggiore di a , e però la celerità maggiore della corrispondente alla semplice pressione a ; conseguenze ambedue contrarie alla sperienza. Dunque non deesi considerare la capacità del buco, come un recipiente comune alle diverse luci. Dopo ciò del valore, e peso delle fin qui addotte ragioni, e sperienze, ne lascio ai dotti il giudizio: dichiarandomi pronto a cangiar parere, ogni qualvolta che mi si manifesti il mio errore, o con maggior evidenza mi si dimostri l'opposto.

- 16 Per la sopra allegata strettezza de' fineltrini, ed ancora per la preveduta difficoltà di maneggiare colla necessaria diligenza un-così grosso corpo, e violento di acqua, non si sono fatte sperienze col detto imbuto grande nei due piani inferiori, ma solamente nel superiore, ovè notaronsi anche dai tre sopra lodati Professori li subiti abbassamenti di circa linee 24. nella superficie dell'acqua al primo aprirsi dello imbuto, i quali poi continuavano ancora per qualche tempo, sebbene più lentamente, e molto più subiti faceansi gli alzamenti della superficie medesima al primo chiudersi dell'aperiura. Poiche essendo la dispena effettiva maggiore di piedi 3. e mezzo per minuto secondo, un tale parallelepipedo acqueo applicato ad una base di circa tredici piedi quadrati, qual'è la stessa superficie superiore dell'acqua nella Torre, fa un'altezza di circa pollici quattro in un minuto

secondo: non potendo così prontamente accorrere al rimpiazzamento della effluente, l'acqua dell'introduttore, come avrebbe bisognato, per impedirne ogni abbassamento, il quale perciò appunto rendevasi assai visibile, siccome per l'opposto facevansi assai più subiti gli alzamenti al cessare dell'efflusso.



DEGLI SPERIMENTI IDRAULICI. ⁴⁷

P A R T E S E C O N D A .

C A P O I .

A Li 6. Ottobre del 1767. offervossi lungamente il diametro della vena nella luce circolare di tre pollici di diametro in lastra sottile col sopra mentovato compasso, e trovossi di circa linee 28. e mezza, la sua distanza dallo spigolo interiore dell'apertura di circa linee 15.; nello stesso giorno a sera si sono fatte alcune sperienze nel secondo piano con imbuto cicloidale lungo linee 26. col diametro interiore di linee 46. coll'esteriore di linee 36., e replicate alla mattina del dì 7. seguente, trovossi l'area della vena di pollici quadrati 6. 11. 8., 6. 11. 7., 6. 11. 3., 6. 11. 8.

Ed applicando nello stesso luogo l'imbuto adoperato nell'anno precedente; lungo linee 24. trovossi la vena di pollici quadrati 6. 10. 10., 6. 10. 7.

Offervossi pure; che la vena si fa uguale all'apertura ad una distanza circa quadrupla del diametro della stessa apertura.

Le quali osservazioni ne parve non potersi fare con maggiore accuratezza a cagione del continuo notabilissimo tremore della vena, e dell'increspamento di sua superficie. In tanto l'area della vena di pollici 6. 11. 8. non differisce dall'area della luce di pollici 7. 0. 10., che di una linea, e punti due superficiali, cioè di circa un settantesimo terzo della luce medesima.

Sperienze con tubi di varia lunghezza.

2 Ai numeri 93., 94., e 95. del primo volume essendoti tentato di scoprire qual lunghezza di tubo, rispettivamente al diametro, ne desse il massimo effetto, ed in quale ragione diminuiscano le dispenfe, oppure le celerità, e quale rapporto aver possa l'effetto massimo assoluto al relativo, si

trovò la faccenda bisognevole di un maggior numero di sperienze, e riflessioni. Per altro un somigliante argomento sembrandoci di qualche importanza, si procurò in quest' anno di accertarlo: perchè, a vero dire, le quantunque picciole irregolarità dei differenti tubi, l'alterazione della vena naturale cagionata dalla specie d'imbuto fatto dal risalto della lastra siffa sopra la mobile esterna, non ostante che ci siamo ingegnati di sommetterle al calcolo, non tralasciano d'ingenerarci qualche dubbio circa la verità delle conseguenze. Perciò cominciando dagli 8. di Ottobre 1767. fino alli 22. del medesimo mese sonosi fatte molte sperienze con un tubo cilindrico di due pollici di diametro, lungo da principio pollici sedici, adattato alla lastra mobile dello stesso diametro nel piano superiore, la quale lunghezza di pollici sedici si andò raccorciando da due in due pollici, finchè si ridusse a pollici sei; e quindi raccorciossi solamente di un pollice per volta. Ogni sperimento fu replicato più volte per lo spazio di venti minuti primi; e poichè inutile, e troppo noiosa cosa sarebbe il riferirli ad uno ad uno, ivi non esporrò, che i semplici risultati, ciò bastare potendo al fine propostoci.

Lunghezze dei tubi in pollici		Vene medie risultate dagli sperimenti in pollici quadrati		Le vene stesse ridotte in atomi, e loro diff.	
Pollici	16.	. . .	2. 6. 6.	4392.	
	14.	. . .	2. 6. 7. 7.	4411.	+ 19.
	12.	. . .	2. 6. 9. 4.	4432.	+ 21.
	10.	. . .	2. 6. 10. 6.	4446.	+ 24.
	8.	. . .	2. 7. 2. 4.	4492.	+ 46.
	6.	. . .	2. 7. 3. 4.	4504.	+ 12.
	5.	. . .	2. 7. 4. 3.	4515.	+ 11.
	4.	. . .	2. 7. 1. 4.	4480.	- 35.
	3.	. . .	2. 7. 0.	4464.	- 16.
	2.	. . .	2. 6. 6. 3.	4323.	- 41.
	1.	. . .	1. 11. 6. 4.	3388.	- 935.
	0,5	cinq. on. fra- police luce	1. 11. 3.	3348.	- 40.

OSSER.

1.^a

- 3 La massima dispensa fattasi con questi tubi di varia lunghezza si è quella del tubo lungo cinque pollici, qual è di pollici quadrati 2. 7. 4. 3., o sieno atomi 4515., ed essendo il diametro del tubo di due pollici, vedesi almeno prossimamente verificata dalla sperienza la congettura fatta al numero 93. pag. 113., vol. 1. ove dissi, che l'effetto massimo seguir dovrebbe, quando la lunghezza al diametro del tubo fosse, come 5. al 2.

2.^a

Col successivo allungarsi del tubo, successivamente ancora si diminuisce l'effetto; e così pure si diminuisce, se la lunghezza del medesimo tubo facciasi minore di quella, che produce il massimo; e ciò fino a che arrivi ad uguagliare l'effetto della semplice luce aperta in lastra sottile. In quei casi vedesi attorno l'orifizio esteriore del tubo, lasciarsi dall'acqua uscente un intervallo di qualche linea.

3.^a

Sensibilmente uguali sono le dispense de' tubi, de' quali uno è lungo due pollici, e l'altro sedici, o dicasi, de' quali uno è lungo un diametro, e l'altro è lungo otto diametri; e sensibilmente uguali sono le differenze delle dispense fatte dai tubi lunghi 5., 6., 7., e 8. diametri. Quindi un tubo lungo 10. diametri, o sia 20. pollici, darà una dispensa non maggiore di 2. 6. 3., e quello lungo 12. diametri, o pollici 24. darà una dispensa non maggiore di 2. 5. 9. 8., e queste ridotte come le altre in interi, faranno, come 4356., 4292.7 e perciò alle lunghezze de' tubi

Di pollici	Corrisponderanno vene di pollici quadrati	Od in numeri interi, atomi superficiali, e 1010
8. . .	2. 7. 2. 4.	4492. diff.
12. . .	2. 6. 9. 4.	4432. — 60.
16. . .	2. 6. 6.	4392. — 40.
20. . .	2. 6. 3.	4356. — 36.
24. . .	2. 5. 9. 8.	4292. — 64.

4.
4 Ora, se la ragione di codeste vene esprimere si voglia con numeri relativi al 324., in cui ne' sopra citati luoghi del primo volume si suppose divisa la dispensa massima, ed assoluta, o pure la massima, ed assoluta celerità della effluente, pongasi la vena 2. 7. 2. 4. del tubo lungo otto pollici, o sieno atomi superficiali 4492. = parti 265., e troverassi la vena 2. 6. 9. 4., o sieno atomi 4432., essere di parti 261. 6., così quella del tubo lungo pollici 20., di parti 256. 11. onde le vene, o le celerità nei tubi lunghi pollici 8., 12., 16., 20., 24. rispettivamente alla massima posta di parti 324. si faranno di parti 265., 261. 6., 259. 1., 256. 11., 253. 2., e perchè parti 265., e 259. per i tubi lunghi otto, e sedici pollici, assai prossimamente concordano colle ritrovate nelle sperienze del primo volume; ma non così quella del tubo lungo pollici 24., la quale là trovasi di parti 248. Cercasi ora tanto questa, quanto le altre, col metodo della iperbola fra le asintote. Ponendosi le celerità nell'egresso dai tubi lunghi pollici 8. e 16., di parti 265. e 259. la distanza del centro dalla estremità del tubo di otto pollici, sarà di parti 345. ed un terzo, e dalla estremità del tubo di 24. pollici, sarà di parti 361. ed un terzo, per cui, se si divide la potestà dell' iperbola 91513. ed un terzo, trovasi parti 253. 3.; ma per il tubo lungo pollici 12. hannosi parti 261. 11. 7., e pel tubo lungo pollici 20., se ne hanno 256. 1. 2.; dunque le parti proporzionali alle vene, od alle celerità dell'egresso, trovate colla sperienza, sono 265., 261. 6.,

259. 1., 256. 11., 259., 256. 1., 253. 3. Tanto dalle prime, che dalle seconde chiaramente apparisce, che si sono diminuite di troppo le vene del tubo quadrangolare, e del cilindrico di un solo pollice di ampiezza, nelle osservazioni sopra le prime sperienze, il qual tubo nei supposti ivi fatti è equivalente al tubo lungo pollici 24., e per cui trovaronsi solamente parti 248. 7., e la soverchia diminuzione essere circa un cinquantesimo della giusta vena. In fatti le vene del tubo quadrangolare o. 9. 2. 6., e del cilindrico o. 7. 4. 9., colle quali si trovò il n. 248. 7., accresciute di una loro cinquantesima parte, fannoli o. 9. 4. 8. 6., e o. 7. 4. 9. assai vicine alle dateci dagli sperimenti.

Che se codeste medesime vene, o celerità si volessero non alterate dalla specie d'imbuto nella introduzione: basta osservare, che la vena di una luce circolare di due pollici di diametro in lastra sottile, n. 74. pag. 90., si è trovata di pollici quadrati 1. 11. 1. 6., e che ivi, a cagione di esso imbuto, cresce di o. o. 10. 6., e fassi di 2. o. o., che all' 1. 11. 1. 6. sta, come 576. al 555.; onde possano tutte diminuirsi nella ragione medesima.

¶ Dopo la correzione delle vene nei tubi di varia lunghezza, e del medesimo diametro, deesi pur anche correggere la proporzione stabilita al n. 95. pag. 117. tra la celerità massima assoluta, e la massima relativa del 324. al 274., ove pure dissi, che la massima effettiva non giugnerebbe al 267. A quest'effetto valendoci della stessa regola, e solo variando il valore di Dd , ponendolo, quale ivi trovasi di parti 253. in vece delle 248., ed il valore di $Cc - Dd$ ponendolo di 12. in luogo di 17., trovasi $AC = \frac{16. \times 253.}{12.} = 337.$ ed un terzo, $AE = 329.$ ed un terzo; quindi $Ee = \frac{AC \times Cc}{AE}$, fassi $= \frac{337. \frac{1}{3} \times 265.}{329. \frac{1}{3}} = 271.$ ed un terzo in luogo di 274.

E quanto alla massima effettiva: facciasi, come l'area della luce 3. 1. 8. 7. alla massima vena ritrovata nelle sperienze di 2. 7. 4. 3., così il n. 324. ad un altro, questo sarà 269., da diminuirsi però nella poc' anzi accennata ragione del 576. al 555., onde divenga 259. ed un terzo circa, o dicasi 260. in vece del 267., e sarà la massima assoluta alla massima effettiva, come il 324. al 260., oppure come l' 81. al 65, circa,

C A P O II.

Osservazioni sopra la regola delle due sezioni.

- 7 **N**ella primavera del 1767., tra gli altri lavori, si proseguì in muraglia il conduttore, come dissi da principio, per piedi 41. 6., ai quali si aggiungono in fine piedi 9. 3. in legno; onde la totale lunghezza diritta, e regolare sia di piedi 146. 9. Inferiormente alla seconda scala se ne fissò una terza distante piedi 40. da quella, e si esaminò il fondo col livello ordinario, e poscia con acqua stagnante ancora, il quale trovossi acclive con qualche irregolarità. Cioè di circa linee otto dalla prima alla seconda scala, e di circa linee sette dalla seconda alla terza. In seguito a codesta acclività insorse dubbio circa la regola delle due sezioni, proposta al n. 121. del primo volume, poichè quanto al prolungamento del canale era cosa certa, che coll' allontanarsi la chiamata, dovesse da principio farsi più lento il moto; e quindi farsi maggiori le altezze, e minore la inclinazione di superficie nella corrente; per altra parte ella è cosa altresì nota, che dove piccola sia l'acclività del fondo, siccome dove piccolo sia l'ostacolo al libero corso di una corrente, non tralascia di scorrere l'acqua vicina al fondo, e tanto più facilmente sale, e supera l'ostacolo, quanto maggiore è il corpo fluente, e maggiore la sua celerità. Del che ci assicurammo più volte: quando scorrendo chiara, ed in poca altezza, osservam-

mo, che le foglie, i legnetti, ed altri corpicciuoli radenti il fondo, proseguivano il loro cammino, sebbene più lentamente di quelli, che alla superficie erano più vicini. Talora si attraversò il conduttore con un afficello posto fra gl' incastri dell'ultima porticella lontana piedi 2. 8. 6. dall'ultima scala. Codesto afficello alzavasi circa due pollici dal fondo, e quando gonfiata la piccola corrente scaricavasi per di sopra, gettaronsi due globetti bianchi, di gravità specifica alquanto maggiore, che l'acqua sul principio del corso, e si videro essi globetti camminare lentamente radendo il fondo fin vicino all'ostacolo, e solo fermarsi lontani da esso, quando l'ostacolo alzavasi tre o quattro pollici sopra il fondo; il che più chiaramente provasi con altra sperienza riferita al n. 23. cap. 3.; ma se codetta acclività non rende immobile l'acqua vicina al fondo, certamente non concorre ad accelerarne il movimento, che anzi lo rallenta. Onde ragionevole pare il dubbio, se in questi casi possa adoperarsi una regola, che suppone l'acceleramento in tutte le due sezioni.

8 A fine di uscire da queste incertezze, si replicò tre volte la seguente sperienza: scorrendo l'acqua pel conduttore coll' altezza di pollici 10. linee 3. alla prima scala, di poll. 8. 9. alla seconda, e di pollici 7. 5. alla terza: nel tempo di 8' scaricaronsi nelle valche piedi cubici 1389. 6., quindi la portata effettiva per ogni minuto secondo fu di piedi cubici 2. 10. 8. 10., applicando ivi il metodo delle due sezioni, senz' altro riguardo trovasi un risultato di soverchio abbondante, e dopo varj tentativi ne riuscì il seguente:

Si osservò, che l'inclinazione della superficie corrente dalla prima alla seconda scala era di linee 8., dalla seconda alla terza di linee 11., e conseguentemente dalla prima alla terza di linee 19., mentre la totale altezza alla prima scala era di linee 123., alla seconda di linee 105., alla terza di linee 89.

Presà la differenza 4104. dei quadrati 15129., e 51025. delle due altezze 123. e 105., e facendo come 4104. al quadrato minore 11025., così l'inclinazione di superficie tra

le due altezze, cioè linee 8. ad un quarto, trovansi linee 21. 5., cioè pollici 1. 9. 5., cui compete una celerità di piedi 2. 11. 0., che moltiplicati per l'area della prima fezione, cioè per piedi 1. 8. 6., danno la portata di piedi 5. 1. 2.

Calcolando nella stessa maniera le altezze della seconda, e terza scala, trovasi la portata di piedi cubici 5. 0. 9., e nella stessa maniera calcolando la prima colla terza scala, cioè facendo, come 7208. differenza de' quadrati 15129., e 7921. al quadrato minore 7921., così l'inclinazione di linee 19. di superficie tra la prima, e l'ultima scala, ad un quarto termine, trovansi linee 20. 10. 6., sensibilmente la stessa che nel primo caso, in cui trovossi di linee 21. 5.

Se codeffa portata 5. 1. 2. riducasi alla ragione del

$\frac{18.}{10. \frac{1}{4}}$, trovansi piedi cubici 2. 10. 10. circa; con ciò però

non pretendesi, che la cosa sia per riuscire in ogni altro caso, e la ragione di ciò vedrassi nelle cose seguenti. Sul principio del 1768. si procurò di spianare, e rendere orizzontale tutto il fondo del conduttore fatto di muro, alzandolo, ed abbassandolo ove ne abbisognava, e dopo esaminandolo non solamente col livello ordinario, ma con acqua stagnante ancora tanto in lunghezza, che in larghezza senza trovarci divario notabile, se non dall'ultima scala in giù per i rimanenti piedi 7. 6. di circa una linea, e per i piedi 9. 3. in legno, di linee 6.: dopo che rientra con piccolo salto nel suo antico fosso dotato, come si disse, altrove, d'insigne declività. Con ciò ne parve avere riparato alle irregolarità cagionate dall'acclività del fondo, nè doverci più ritrovare, se non quei maggiori alzamenti di corpo, naturalmente prodotti dal prolungamento del canale, ai quali dovesse supplire il metodo senz'altro riguardo.

- 9 Ma diverse sperienze fatte in conseguenza ne fecero accorti rimanervi qualche altra circostanza non per anco bene osservata, oltre al maggiore alzamento della corrente, ed ella fu, che il prolungamento cagiona ancora una inflessione con-

33
 vessa nella superficie corrente tra il principio, ed il fine del canale, il massimo della quale trovasi ora più in su, ora più ingiù, a misura, che il corpo scorre con maggiore, o minore altezza: perchè naturalmente più allo in su deve trovarsi il principio della chiamata, quando l'acqua è più alta; ma allora avendo ancora maggior forza, da questa di bel nuovo viene portato alquanto all'ingiù, ed all'opposto più verso il termine, quando è più bassa, ed ecco ciò, che turba l'applicazione del metodo, il quale suppone ne' canali di fondo orizzontale, che la superficie tra le due sezioni sia una superficie d'iperboloide, o almeno sensibilmente piana, cioè suppone un regolare acceleramento di moto cagionato dalla vicina chiamata.

La realtà della suddetta inflessione convessa apparisce dalle altezze in ciascuna delle sperienze, che or ora riferiremo, e principalmente dalla seguente osservazione: essendosi nella sponda dell'introduttore tirata diligentemente con acqua stagnante una orizzontale equidistante dal fondo per pollici 24. linee 11., misuraronsi lungo il conduttore undici intervalli uguali di piedi dieci caduno, ed un duodecimo, ed ultimo rimanendo di piedi 7. e mezzo, di modo che la distanza tutta cominciata piedi 10. sopra la prima scala, sia di piedi 117. 6.

Alli 26. Settembre scorrendo liberamente un corpo di acqua pel conduttore: sul principio l'orizzontale era elevata sopra la superficie della corrente pollici 14. 7., dopo il primo intervallo, pure 14. 7., dopo il secondo 14. 7. 6., dopo il terzo 14. 9. 6., dopo il quarto 14. 11., dopo il quinto 15. 1., dopo il sesto 15. 3., dopo il settimo 15. 7., dopo l'ottavo 15. 9., dopo il nono 16. 1., dopo il decimo 16. 6., dopo l'undecimo 16. 9., in fine 16. 10. Niuna sensibile inclinazione pertanto osservossi nel primo intervallo, ma nei dieci seguenti, ed uguali, le inclinazioni furono di linee, e punti come segue

0.	1.	2. ^o	3. ^o	4. ^o	5. ^o	6. ^o	7. ^o	8. ^o
0.,	0.	6. punti,	2. lin.,	lin. 1.,	lin. 2.,	lin. 2.,	lin. 4.,	lin. 2.,
	9. ^o	10. ^o	11. ^o	fine				
lin. 4.,	lin. 5.,	lin. 3.,	lin. 1.,					

e le altezze della corrente furono
 poll. 10. 4., 10. 3. 6., 10. 1. 6., 10., 9. 10., 9. 8., 9. 4., 9. 2.,
 8. 10., 8. 5., 8. 2., 8. 1.

Dove vedesi, che cominciava a farsi maggiore l'inclinazione tra il 6.^o, e il 7.^o intervallo, e maggiore ancora tra il 9.^o, e 10.^o, nei primi intervalli potendosi prendere per uniforme, poichè una mezza linea può facilmente attribuirsi a difetto della osservazione medesima, mentre la superficie non scorre affatto piana, ed uniforme, ma sempre ondeggiando: intanto dopo piedi 30. della prima scala, l'inclinazione della superficie trovasi di linee 4., dopo altri 30. piedi, cioè alla seconda scala di linee 8., e dopo altri 30. piedi, di linee 11., e dopo altri 10. piedi di linee 3., cioè alla terza scala di linee 14., e però dalla prima scala all'ultima di linee 26., e sino al termine in muraglia di linee 27. Dove pure fassi manifesto, che la maggiore inclinazione nella parte inferiore, si è l'effetto della prossima chiamata, la quale meno, o nulla fassi sentire dalle parti superiori, e più remote, se non quando scorresse un corpo di acqua più alto. Ciò potrà ancora osservarsi nelle seguenti sperienze; al qual fine a 20. piedi inferiormente alla prima scala, se n'è fissata un'altra, che chiameremo la seconda, e quella che era la seconda sarà in avvenire la terza, e l'ultima sarà la quarta.

Sperienze di misura d'acqua corrente.

1.^a

- 10 A' 30. Settembre. Le altezze alle quattro scale essendo di pollici 14. 0., 13. 6., 12., 11. 6.; nel tempo di 4', si scaricarono

ricarono nelle vasche piedi cubici 1455. 3. 9., che danno la portata effettiva per ogni minuto secondo di piedi cubici 6. 7. 8. Calcolandosi colla prima, e terza scala, trovansi piedi cubici 11. 1. 0., quali due portate ridotte alla ragione del 18. all'11., darebbero le effettive di piedi cub. 7. 10. 3., e piedi cubici 6. 9. 3.

2.^a

A' 7. Ottobre: le altezze alle quattro scale essendo di pollici 13. 4., 12. 11., 11. 10., 10. 3.; nel tempo di min. 4' 15" si scaricarono nelle vasche piedi cubici 1550., che danno la portata effettiva per ogni minuto secondo di piedi cubici 6. 0. 11.

A' 20. Ottobre colle medesime altezze; nel tempo di minuti 4', si ebbero nelle vasche piedi cubici 1455. 3. 9., che danno per minuto secondo piedi cubici 6. 0. 9.

A' 25. Ottobre le altezze essendo di poll. 13. 4., 13. 0., 11. 11., 10. 3. calcolata col tubo Pitot, come dirassi altrove, trovasi pure la portata effettiva di piedi cub. 6. 0. 9.

Non badando alla differenza di una linea nelle scale di mezzo, computando colle altezze della prima, e terza, cioè con pollici 13. 4., e 11. 10., trovasi un prodotto di piedi cubici 11. 8. 6. 8., e computandosi colle altezze della terza, e quarta scala, cioè con pollici 11. 10., e 10. 3., trovasi 9. 8. 2., che ridotti alla ragione del 18. all'11., darebbero l'una piedi 7. 1. 10., e l'altra 5. 10. 11., cioè la prima maggiore, e la seconda di poco minore della vera 6. 0. 9.

3.^a

A' 20. Ottobre: le altezze alle quattro scale essendo di pollici 13. 0., 12. 8., 11. 8., 10. 0. nel tempo di 4' si scaricarono nelle vasche piedi cubici 1415. 9. 7., che danno per minuto secondo piedi cubici 5. 10. 9. Il computo fatto colla prima, e terza scala da piedi cubici 11. 4. 6., e fatto colla terza, e quarta, da piedi cubici 9. 3. 11. 7., le quali ridotte alla ragione del 18. all'11. danno piedi cub. 6. 11. 5., e 5. 8. 5.

H

4.^a

A' 16. Ottobre: le altezze alle quattro scale essendo di pollici 11. 11., 11. 7., 11. 7., 9. 8. minori di circa una linea delle precedenti: il computo fatto colla prima, e terza scala dà piedi cubici 11. 3. 1., e colla terza, e quarta scala dà 9. 0. 7., che ridotti alla ragione del 18. all' 11. danno piedi cubici 6. 10., e 5. 6. 4.

5.^a

A' 20. Ottobre: le altezze alle quattro scale essendo di pollici 11. 5., 11. 0., 10. 3., 8. 6., nel tempo di minuti 4' 15" si ebbero nelle vascbe piedi cubici 1502. 5. 4., che danno per secondo piedi cubici 4. 9. 2. 9. Il computo della prima colla terza scala dà piedi cubici 9. 4. 6., e quello della terza con la quarta dà piedi cubici 7. 5. 10., che ridotti alla ragione del 18. all' 11. danno 5. 8. 9., e 4. 6. 10.

6.^a

A' 20. Ottobre: le quattro altezze essendo di pollici 11. 3., 10. 10., 10. 0., 8. 5., nel tempo di min. 5' 30" si scaricarono nelle vascbe piedi cubici 1504., che danno per minuto secondo piedi cubici 4. 6. 8. Il computo della prima colla terza dà piedi cubici 9. 1. 0., e della terza colla quarta dà piedi cubici 7. 3. 7. 8., che ridotti alla ragione del 18. all' 11. danno 5. 6. 7., e 4. 5. 7.

7.^a

A' 25. Ottobre: le quattro altezze essendo di poll. 11. 0., 10. 6., 9. 9., 8. 0., si calcolò la portata col tubo Pitot nel conduttore nella maniera, che dirassi a suo luogo, e trovossi di piedi cubici 4. 5. 4.; e nell' introduttore, dopo essersi gettata la corrente tutta nella Torre, trovossi di piedi cubici 4. 3. 7.

Queste medesime altezze trovandosi ancora alli 26. Ottobre, si misurò la corrente col regolatore, e trovossi di 4. 4. 6.

In oltre: qualunque di queste portate trovasi media tra la precedente effettiva di piedi 4. 6. 8., e la seguente di piedi

4. 2. 9. Essendo pure in queste, le altezze medie tra le altezze dell' una, e dell' altra. Il computo fatto colla prima, e terza scala dà piedi cubici 8. 9. 3., e quello fatto colla terza, e quarta dà piedi cubici 6. 10. 10., i quali ridotti alla ragione del 18. all' 11. danno piedi cub. 5. 5. 0., e 4. 2. 7., e' l' computo fatto colle scale inferiori supponendosi allontanato per 20. piedi la superiore, sicchè l' intervallo fra esse faccia di piedi 60., e l' altezza prima di pollici 10. 1. 6., trovati di piedi 7. 0. 7., che riducesi a piedi 4. 3. 8.

8.^a

A' 19. Ottobre: le altezze alle quattro scale essendo di poll. 10. 9., 10. 5., 9. 8., 8. 0., nel tempo di min. 5' 30", sono avuti piedi cubici 1397., che danno per minuto secondo piedi 4. 2. 9. Il computo fatto colla prima, e terza altezza dà piedi cubici 8. 6. 10., e quello fatto colla terza, e quarta dà piedi cubici 6. 10. 2., i quali ridotti alla ragione del 18. all' 11. danno 5. 2. 10., e 4. 2. 2., ed alli 25. Ottobre trovandosi le medesime altezze, il computo fatto col tubo dà piedi cubici 4. 3. 5. 9.

9.^a

A' 5. Ottobre: avendosi le altezze di pollici 9. 0., 8. 9., 8. 2., 6. 10., nel tempo di minuti 6' 30" si ebbero nelle vasche piedi cubici 1336. 9. 4., che danno la portata effettiva per ogni minuto secondo di piedi 3. 5. 1. 7. Il computo fatto colla prima, e terza altezza dà piedi cub. 5. 4. 5., che ridotti alla ragione del 18. all' 11., divengono 4. 0. 5., e 3. 3. 4. 4.

10.^a

A' 18. Ottobre: avendosi le altezze di pollici 8. 6., 8. 3., 7. 8., 6. 4.; nel tempo di minuti 8' scaricaronsi nelle vasche piedi cubici 1343., che danno per minuto secondo piedi cubici 2. 9. 6. Il computo fatto colla prima, e terza altezza dà piedi cubici 6. 0. 4., e fatta colla terza, e quarta dà piedi cubici 4. 9. 11., che ridotti alla ragione del 18. all' 11., si fanno 3. 8. 2., e 2. 11. 4.

H 2

11.^a

Agli 11. Ottobre: avendosi le altezze 8. 4., 7. 10., 7. 5., 6. 3.; nel tempo di minuti 7' scaricaronsi piedi cubici 1165. 10. 3. 6., o dicasi 1166., che danno per ogni minuto secondo piedi cubici 2. 9. 3. Il computo colla prima, e terza altezza dà piedi cubici 5. 9. 6. 8., e colla terza, e quarta piedi cubici 4. 8. 0., che ridotti alla ragione del 18. all' 11., fannosi piedi cubici 3. 6. 6., e 2. 10. 2.

12.^a

A' 18. Ottobre: le altezze essendo di pollici 8. 2., 7. 9., 7. 2., 5. 10.; nel tempo di minuti 9' 30" si ebbero nelle vasche piedi cubici 1486. 6. 6., che danno la portata effettiva per ogni minuto secondo di piedi cubici 2. 7. 3. Il computo fatto colla prima, e terza altezza dà piedi cubici 5. 6. 9. 8., e fatto colla terza, e quarta, piedi cub. 4. 3. 9., che ridotti alla ragione del 18. all' 11., sono piedi cubici 3. 4. 2., e 2. 7. 6. 8.

13.^a

A' 17. Ottobre: essendo le altezze di pollici 7. 9., 7. 5., 6. 10., 5. 6.; nel tempo di min. 10' si ebbero nelle vasche piedi cubici 1455. 3., che danno per ogni minuto secondo piedi cubici 2. 5. 1. Il computo fatto colla prima, e terza altezza dà piedi cubici 5. 2. 0., e colla terza, e quarta piedi cubici 4. 0. 9., che ridotti alla ragione del 18. all' 11., fannosi 2. 11. 10., e 2. 5. 8.

14.^a

A' 18. Ottobre: avendosi le altezze di pollici 6. 10., 6. 5., 6. 0., 4. 10.; nel tempo di minuti 12' scaricaronsi piedi cubici 1380., che per ogni minuto secondo sono 1. 11. 0. Il computo della prima colla terza scala dà piedi cub. 4. 3. 2., della terza, e quarta dà piedi cub. 3. 3. 4., che ridotti alla ragione del 18. all' 11., fannosi 2. 7. 3., e 2. 0. 0.

L'irregolare decremento delle altezze vive rispetto alle distanze conferma la succennata convessità della superficie corrente, e tutto insieme ne avverte farsi anche irregolare l'acceleramento nelle sezioni superiori; quindi tutte notabilmente eccedenti trovansi le portate calcolate colle scale superiori, e più prossime al giusto le calcolate colle scale inferiori; anzi queste facilmente riduconsi all'esattezza, come vedrassi fra poco, e ci danno motivo ad un importante riflesso: intanto per rendere i risultati di codeste sperienze comodi all'osservazione, qui aggiugneshi un

EPILOGO DELLE SUDDETTE SPERIENZE.

	<i>Portate dalle scale superiori ridotte al $\frac{11}{12}$</i>	<i>Portate dalle scale inferiori ridotte al $\frac{11}{12}$</i>	<i>Portate effettive date dall'attuale misura</i>	
1 ^a P. cub.	7. 10. 3.	P. c. 6. 9.	3. P. c. 6. 7. 8.	com. ^e
2 ^a	7. 1. 10.	5. 10. 11.	6. 0. 11. o pure 6. 0. 9.	
3 ^a	6. 11. 5.	5. 8. 5.	5. 10. 9.	
			ol regol.	
4 ^a	6. 10. 6.	5. 6. 4.	6. 0. 3. 5. 6. 7.	media
5 ^a	5. 8. 9.	4. 6. 10.	4. 9. 2. 9	com. ^e
6.	5. 6. 7.	4. 5. 7.	4. 6. 8.	
7 ^a	5. 5. 0.	4. 2. 7.	4. 4. 0.	
8 ^a	5. 1. 10.	4. 2. 2.	4. 2. 9.	
9 ^a	4. 0. 5.	3. 3. 4.	3. 5. 1. 7	
10 ^a	3. 8. 1.	2. 11. 4.	2. 9. 6.	
11 ^a	3. 6. 8.	2. 10. 2.	2. 9. 3.	
12 ^a	3. 4. 2.	2. 7. 7.	2. 7. 3.	
13 ^a	2. 1. 10.	2. 5. 9.	2. 5. 1.	
14 ^a	2. 7. 3.	2. 0. 0.	1. 1. 0.	

- 12 Ora a fine di conoscere onde procedano questi divarj, e poterli correggere, e prevedere in altri luoghi. Consideriamo l'incamminamento dell'acqua pel conduttore: stramazza questa lateralmente dal suo primo canale nel conduttore da un'altezza maggiore di un piede, ivi alzandosi a misura della sua massa senza incontrare per davanti verun ostacolo, comincia a muoversi con una celerità conveniente alla propria altezza, ed alla spinta, che dalla cadente continua riceve; successivamente si va riempiendo il canale, ed intanto va pur anche rallentandosi il primo movimento, e tanto più si rallenta, quanto più è lungo il cammino, che far dee prima di giugnere al suo termine, facendosi sempre maggiore il corpo da spingersi innanzi. Ma quanto è maggiore la sua altezza, tanto più da lontano risente, dirò così, l'invito del fondo inclinato susseguente all'orizzontale, e le parti verso la superficie sono le prime ad incontrarlo, ed a scendere per esso, e perciò ad accelerarsi, e più tardi entrano nello stesso piano inclinato; quindi le parti superiori già muovonsi con aumento di celerità acquistata per la discesa, mentre le inferiori continuano a muoversi per un qualche tratto colla primiera celerità: sebbene le superiori già accelerate non possono non accelerare ancora in qualche modo le inferiori contigue, e le inferiori più lente, non rallentare le superiori, onde in ogni sezione facciafi da tutte insieme un moto assai composto, quantunque in ciascuna sia di uguale quantità; il che meglio comprenderassi colla ispezione della figura terza tav. 1.

Sia BN il fondo, CEL la superficie inclinata della corrente, ed API la orizzontale, se l'acqua sia come stagnante. Ora se il fondo in vece di continuare dirittamente in un piano verso N , si pieghi in G , in un più inclinato GO , è chiaro, che se l'acqua faceva prima l'altezza GE , o pure GH , a cagione dell'inflexione del fondo, farà un'altezza minore, come GF perpendicolare alla GO , e prolungandosi OG fino in C , o in P , comincerà ivi la superficie a deviare dalla direzione CL , ed inclinarsi in CFM .

di sorta che nello intervallo tra CD , GF l'acqua inferiore alla inclinata CG continuerà a muoversi come prima, la superiore alla stessa CG farassi più veloce, e nel punto G principio del fondo più inclinato avrà la celerità conveniente all'altezza GH , ed in F la conveniente all'altezza FK , (prescindendo per ora dalla composizione de' movimenti, nata dalla reciproca partecipazione di celerità, e di lentezza fra le parti contigue), ed il complesso delle celerità potrà rappresentarsi col trapezzo della parabola descritta all'asse inclinato GI , che ha in G comune l'ordinata colla parabola descritta all'asse verticale GH , l'altezza del quale trapezzo sia la stessa GF . Dal che fassi evidente non meno la convessità della superficie CEM , che l'irregolarità del movimento dell'acqua tra CD , e GF : vero è, che nel nostro caso l'angolo CGD è piccolissimo, essendo minore di minuti 10', con tutto ciò non trascurasi d'importare circa pollici 1. 4. alla distanza di 40. piedi, pollici 2. alla distanza di 60., e pollici 3. 6. circa, alla distanza di piedi 100. Perilchè trovassi maggiore l'eccesso delle portate nelle correnti più alte, e minore nelle più basse, se il computo si faccia colle scale inferiori, dove a prevalere comincia l'acceleramento prodotto dalla chiamata del susseguente fondo inclinato. La stessa cosa succede, se alle superiori scale si adatti il tubo Pitot, ed il computo si faccia colla regola proposta al n. 110. del primo volume, la quale è comune al regolatore. Ma del tubo Pitot dovendosene trattare altrove particolarmente, proseguirò il discorso sopra la regola delle due sezioni. Ove molto importa l'avvertire, che non dee aver luogo la varietà di riduzioni rispettiva alle diverse altezze vive, proposta al n. 124. del primo volume; ma in tutti i casi la sola del 18. all' 11., od altra più prossima ragione tra l'area della luce, e della sua vena sommamente ristretta. A cotale varia riduzione ne indusse allora quella differenza de' risultati nelle correnti di varia altezza, che ora scopresi procedere dalle sopraccennate cagioni.

14 Qui pure cade in acconcio l'avvertire, che nella regola delle due sezioni, pare, che due volte si mettano in conto le resistenze: l'una, quando si determina il principio del moto, o dicasi il centro dell'iperboloide, od il vertice della parabola, l'altra quando le portate ritrovate riduconsi alla ragione della vena contratta, come del 18. all' 11. Il che, forse più che altrove, sembra insinuarfi alla pag. 197. lin. 7. del primo volume; ove dicefi (che le aree delle sezioni ne daranno sempre la ragione delle loro medie velocità dalle resistenze modificate). Egli è per altro facile il ravvisare due sorte di resistenze, che prova l'acqua nel suo corso. Della prima sorta sono quelle già superate nel tronco superiore, cioè le irregolarità dell'alveo, la varietà delle pendenze, e gli altri ostacoli o naturali, o artificiali, per cagione de' quali viene turbata la celerità naturale, che le competerebbe sin dal principio del suo corso, in conseguenza di quale turbamento ad ogni tratto, per così dire, variasi il principio equivalente dell'alveo, o della discesa. Codesta sorta di resistenze si è quella, di cui si tien conto, quando appunto colla regola trovasi esso principio dell'alveo, o dicasi della discesa.

La seconda sorta di resistenze, sono le inevitabili cagionate dal fondo, e dalle sponde comunque regolari; in forza di queste la velocità nel filone, e nel mezzo è sempre maggiore, che nel fondo, o vicino alle sponde; e perchè il metodo procede ne' suoi computi con la celerità massima, la quale non compete a tutti li punti della sezione, perciò i risultati riescono maggiori del giusto; e deggiono ridursi alla ragione della vena contratta, perchè a queste sono analoghe, come dimostrossi nel primo volume, le resistenze, che soffre l'acqua nello schizzare da luci intagliate in lastre sottili. Queste due sorte di resistenze essendo di specie affatto diversa, ragion vuole, che di ciascheduna se ne tenga conto particolare, come praticasi in questa regola, e sono da se sufficienti, come dimostrano le sperienze, onde più non si abbisogni di altra riduzione.

Stimo

- 15 Stimo cosa superflua il proporre ripieghi, o correzioni, adattabili solamente a certi casi particolari, più vantaggiosa essendo il suggerire mezzi sicuri per conoscere i casi, nei quali possiamo sicuramente valersi di essa regola. Il primo farà un'esatta livellazione del fondo, e della superficie, eziandio per qualche tratto superiormente, ed inferiormente alle due sezioni elette. Perchè con essa facilmente determinerassi il principio dell'acceleramento, e l'inclinazione, che lo produce; e se si voglia, l'angolo d'inclinazione equivalente alla chiamata. Dissi una esatta livellazione: perchè l'errore di poche linee potrebbe cagionare notabile divario nella misura, del che ne convincono queste medesime sperienze. Secondo, quando non si potesse, o non si volesse usare altro mezzo per assicurarci, se trovinsi o no le condizioni dalla regola richieste, potrà ciò ottenersi, scegliendo nel canale medesimo altre due sezioni; anzi per maggior comodo, e brevità, se ne scelgano tre successive. Quindi nella consueta maniera si trovi il principio della discesa, o dicasi distanza del centro dell'iperboloide per due di esse sezioni, per esempio della prima, e della seconda, ed il simile si faccia per due altre, per esempio per la prima, e terza. Se i centri coincideranno, e perciò uguali trovinsi le potestà, faremo sicuri e della regolare pendenza della superficie, e dell'uniforme acceleramento del moto, oppure trovato per due il centro, potressi conoscere, se la terza altezza sia veramente un'ordinata allo stesso iperboloide. Per esempio nella terza delle soprariferite sperienze, in cui le altezze alle quattro scale erano di pollici 13. 0., 12. 8., 11. 8., 10. 0., riducendo in linee le altezze della prima, e terza scala, avranno linee 156. e 140., i quadrati delle quali sono 24336., 19600., e la loro differenza si è 4736., facendosi, come differenza 4736. al quadrato minore 19600., così piedi 60., distanza tra le due sezioni, ad un altro termine, trovanti piedi 248. 3. 8. 9. per la distanza del centro dalla prima scala, o sezione. Questa moltiplicata per 1. 2. 1. quadrato della medesima prima altezza di piedi 1. 1. 0., dà la

potestà dell' iperboloide di piedi 291. 5. Dividendo questa potestà per la distanza dell' ultima scala, o sezione dal suddetto centro, cioè per piedi 348. 3. 8. 9., e dal quoziente di pollici superficiali 10. 0. 5, estraendo la radice quadrata, questa trovasi di pollici lineari 10. 11. 8., e tanta essere dovrebbe l' altezza all' ultima scala, in vece dell' attuale ritrovata di pollici 10. 0., oppure più speditamente, ma meno esattamente, se si faccia, come la distanza di 60. piedi tra le due sezioni alla inclinazione della superficie di linee 16., così la distanza di piedi 100. tra la prima, e l' ultima scala ad un' altra, e troverannosi linee 26. 8., o sia pollici 2. 2. 8., che dettratti dall' altezza prima di 13. pollici, danno l' altezza ultima di pollici 10. 9. 4. Lo stesso dee dirsi, e può farsi, nelle altezze delle altre sperienze.

- 16 Quantunque la ragione delle celerità, e quindi delle cadute a caduna sezione convenienti, si manifesti da quella delle sezioni medesime: perchè, posto costante il flusso dell' acqua nel canale; le celerità sono sempre in ragione reciproca delle sezioni, e se queste sieno di uguale larghezza, le celerità sono sempre reciproche alle altezze; e quindi le cadute generatrici di cotali celerità sono reciprocamente come i quadrati delle sezioni, o come i quadrati delle loro altezze, quando le sezioni sono di larghezza uguale. Con tutto ciò ne giova per altro fine il determinare le medesime ragioni delle celerità, e cadute nelle sezioni senza dipartirci dalla considerazione dell' iperboloide. Quindi se dalle osservazioni fatte ci conti essere irregolare l' inclinazione della superficie, e conseguentemente l' acceleramento del moto, e supposto esso acceleramento, nulla ci vieta di considerare ogni due sezioni, come appartenenti ad un particolare iperboloide, ed in ognuno di essi stando la sua potestà al quadrato della portata, come il seno totale alla tangente di un angolo d' inclinazione equipollente alla cagione dello acceleramento, cioè stando come la distanza della sezione dal centro dell' iperboloide alla caduta, o discesa conveniente alla sezione medesima, ne segue, che le cadute, o discese

in ogni tratto di canale di costante portata, compreso tra due sezioni, faranno come le differenti potestà dei rispettivi iperboloidei, onde conoscerassi la ragione delle cadute, o discese a ciascuna sezione spettanti.

Spieghiamoci con un esempio preso da una delle più sicure esperienze, come è la seconda, in cui trovasi la portata effettiva di piedi cubici 6. 0. 9., e 6. 0. 11., o dicasi di 6. 0. 10. per minuto secondo: dividendosi per la larghezza del canale, cioè per due piedi, il quoziente 3. 0. 5. ne rappresenta come in profilo, il complesso effettivo delle celerità, ed il suo quadrato sarà 9. 2. 6. 2. Erano le altezze alla prima, terza, e quarta scala di pollici 13. 4., 11. 10., 10. 3., o sieno di linee 156., 142., 123., e facendosi come 5436., differenza dei quadrati 25600., 20164. delle due prime, al quadrato minore 20164., così la distanza tra le due sezioni, cioè piedi 60. ad un quarto termine, trovasi questo di piedi 222. 6. 8., e tanta sarà la distanza della prima sezione dal centro dell'iperboloide relativo alle due sezioni, a quale distanza aggiunti li 60. piedi, la somma 282. 6. 8. farà la distanza della seconda sezione dallo stesso centro.

Nella stessa maniera, facendosi come 5035. differenza dei quadrati 20164., e 15129. delle due altezze di linee 142. e 123. della terza, e quarta scala al quadrato minore 15129., così la distanza tra le due sezioni, cioè piedi 40. ad un quarto termine, trovasi piedi 120. 2. 3. per la distanza della prima di queste due sezioni dal centro dell'iperboloide, comune ad ambedue, quale distanza, se l'ultima sezione appartenesse al primo iperboloide, dovrebbe ritrovarsi di piedi 282. 6. 8., sono adunque diversi i due iperboloidei, e la potestà del primo fatti dalla distanza 222. 6. 8. moltiplicata pel quadrato 1. 2. 9. 9. 4. della prima altezza di pollici 2. 1. 4., cioè = 274. 9. 1. 5., e la potestà del secondo farà il prodotto della distanza 120. 2. 3. moltiplicata nel quadrato 0. 11. 8. 0. 4. dell'altezza pollici 11. 10., cioè = 116. 10. 2. 3.

Gerchiamo ora le cadute medesime, facendo come potestà 274. 9. 1. 5. al quadrato della portata 9. 2. 6. 2., così la distanza dal centro della prima sezione 222. 6. 8. ad un quarto termine, e trovansi piedi 7. 5. 3. 6., questa però non è per anco quella, che genera la velocità di essa prima sezione (il che si noti bene); ma bensì il quoziente, che trovasi dividendo 7. 5. 3. 6. per 60., parametro della parabola, che è la scala delle velocità naturali, il quale quoziente è di pollici 1. 5. 10. 3. In fatti moltiplicato per 60., restituisce il 7. 0. 5. 3. 6., da cui estraendo la radice quadrata, trovansi piedi 2. 8. 8. 9., che moltiplicati per l'altezza 1. 1. 4. danno il complesso delle celerità 3. 0. 4. 4. ec.: nella stessa maniera facendosi come potestà 116. 10. 2. 3. dell'altro iperboloide al medesimo quadrato della portata, cioè a 9. 2. 6. 2., così la distagza 120. 2. 3. della prima delle sezioni inferiori dal centro del suo iperboloide ad un quarto termine, trovansi piedi 9. 5. 8., che divisi, come sopra, per 60., danno la caduta ricercata per essa sezione di pollici 1. 10. 8. 9., ed estraendo la radice quadrata dal 9. 5. 8., trovasi la celerità per minuto secondo di piedi 3. 0. 11., la quale moltiplicata per l'altezza della sezione, cioè per pollici 11. 10., dà pur anche il medesimo complesso delle celerità di 3. 0. 4. ec.

- 17 Se sapere si voglia, quale dovrebbe essere l'altezza nell'ultima scala, o sezione se ella appartenesse al primo dei due trovati iperboloidi, dividasi la potestà 274. 9. 1. 5. di quello, per la distagza, che aver dovrebbe essa sezione dal di lui centro, cioè per 322. 6. 8., e dal quoziente di pollici superficiali 10. 2. 7. estrarrafene la radice quadrata, e si troveranno pollici lineari 11. 0. 10. in vece degli effettivi 10. 3., le medesime cose hanno pur anche luogo, quando il tratto di canale fra le due sezioni non fosse rettilineo: imperciocchè la semplice tortuosità del corso, punto non turba il modo di operare, come altrove si avvertì, poichè un tratto di canale tortuoso può considerarsi come esteso in diritto: la teorica, e la sperienza assicurandoci, che le curvature dolci,

cioè non punta forzate, o troppo acute, non alterano la celerità della corrente.

Codeste calcolazioni poi, non rechieranno fastidio ad un perito; il quale sedendo eziandio al tavolino, può con esse meglio assicurarsi di questo punto, che con reiterate operazioni, ed osservazioni fatte sul posto. Profeguendo intanto queste considerazioni: si osservi, che nelle correnti maggiori trovasi l'altezza alla terza scala minore di quella, che sarebbe stata, se il principio della discesa cadesse alla conveniente distanza dall'ultima. Onde convenga prenderla più in dietro, cioè tra la seconda, e terza scala, e meno lungi nelle correnti minori, nelle quali va discendendo il principio della chiamata, e ciò, perchè le sommità delle due altezze non cadono nella medesima curva iperbolica, a cagione della sopra mentovata inflessione convessa della superficie corrente.

Ritorniamo ora alle sperienze, ed osserviamo le differenze tra le portate effettive, e le ritrovate col calcolo fatto, valendoci delle due scale inferiori, e riducendole tutte alla ragione del 18. all' 11.

Portate effettive 6. 7. 8., 6. 0. 10., 5. 10. 9., 5. 6. 7., 4. 9. 2.,
4. 6. 8., 4. 4. 8., 4. 2. 9., 3. 5. 1.

Portate calcolate 6. 9. 3., 5. 10. 11., 5. 8. 5., 5. 6. 4., 4. 6. 10.,
4. 5. 7., 4. 2. 7., 4. 2. 2., 3. 3. 4.

Effettive 2. 9. 6., 2. 9. 3., 2. 7. 3., 2. 5. 1., 1. 11. 0.

Calcolate 2. 11. 4., 2. 10. 2., 2. 7. 6., 2. 5. 8., 2. 0. 0.

Ove chiaramente apparisce, che se l'altezza della superiore di queste due sezioni si accresca per qualche linea nelle correnti più alte, o si diminuisca nelle correnti più basse, faranno le calcolate quanto può bramarli giuste.

I Così per esempio nella seconda sperienza, se in vece dell'altezza di pollici 11. 10. della sezione superiore, si prenda la media tra essa, e la precedente di pollici 12. 11., farassi di pollici 12. 4. 6., e fatto il computo con questa, e coll'ultima di pollici 10. 3., trovasi la portata giusta piedi cubici 6. 0. 9.

2. Così nella terza, se in vece dell'altezza 11. 8., si prenda la media tra essa, e la precedente 12. 8., cioè si prenda pollici 12. 2. trovasi la portata di 5. 10. 7.

3. Così pure nella speriienza quinta, se in vece dell'altezza di pollici 10. 3. della sezione superiore, si prenda la media tra essa, e la precedente di pollici 11. avrannosi pollici 10. 8., con cui, e con la seguente di pollici 8. 6., fatto il computo trovasi la portata giusta 4. 9. 3.

Per l'opposto nelle correnti più basse, come nella 13.^a e 14.^a le altezze della sezione superiore diminuite di qualche linea daranno anche più giuste le portate, nè far deve difficoltà il sapere quanto esse altezze debbano accrescersi, o diminuirsi, dopo le cose poc' anzi dette, e l'attuale osservazione del luogo ove farsi la inflessione nella superficie corrente. Nelle speriienze poi, nelle quali trovansi differenze assai piccole, non è sicuro il cercare maggiore precisione, potendosi esse anche in parte attribuire a difetto di esattezza nella misura delle altezze medesime.

18 Prima di passar oltre in queste ricerche, premettiamo ancora alcune osservazioni sopra l'iperboloide.

Primo. Due diversi iperboloidi dello stesso genere, e che abbiano comuni le asintote, non possono mai nè toccarsi, nè segarsi fra loro: poichè chiamandosi P la potestà dell'uno, e p quella dell'altro; se cotai iperboloidi si potessero segare, o toccare; ne avverrebbe, che dicendosi x la comune ascissa; e y l'ordinata al punto del contatto, o del segamento: farebbesi $xyy = P$, ed $xyy = p$, cioè $P = p$: quindi non sarebbero diversi gl'iperboloidi, come si suppongono.

Secondo. Se due iperboloidi abbiano comune l'ascissa x presa dal centro, le ordinate coincidenti y , z saranno nella sudduplicata ragione delle potestà P , p : perchè avrassi $xy^2 = P$, $xz^2 = p$: quindi $y^2 : z^2 :: P : p$, e $y : z :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$, e se una delle asintote dell'uno cada sopra l'asintota dell'altro iperboloido, ma non coincidano i centri: allora potranno segarsi le curve, ma non semplicemente toccarsi: perchè, dicendosi u , ed x le due ascisse, e l'ordi-

nata al comune segamento dicendosi y , potrà essere $uy^2 = P$, ed $xy^2 = p$: quindi $u : x :: P : p$, il che non ripugna. Non potranno poi semplicemente toccarsi: perchè oltre al punto del supposto contatto, le ordinate della curva interiore tornerebbero a crescere in vece di continuare a diminuirsi, mentre l'interiore di bel nuovo dovrebbe allontanarsi dalla esteriore.

- 19° Estendiamo ora queste speculazioni. Nel primo volume al n. 120. essendosi dimostrato, che ne' canali regolari sensibilmente inclinati di fondo, la potestà dell'iperboloide, in cui componesi la superficie corrente, sta al quadrato della portata, come la segante alla tangente, o sia come il seno totale al seno retto dell'angolo d'inclinazione del fondo sotto alla orizzontale tirata pel principio equivalente dell'alveo, e nei canali di fondo orizzontale, pei quali però scorre l'acqua con qualche uniforme acceleramento di moto, la potestà dell'iperboloide sta al quadrato della portata, come il seno totale alla tangente di un angolo d'inclinazione equipollente alla forza accelerante; quindi, se per un canale di fondo inclinato il seno totale dicasi $= R$, il seno d'inclinazione $= S$, la potestà dell'iperboloide $= P$, la portata della corrente $= Q$: avrassi $R : S :: P : Q^2$; e se in altro canale diversamente inclinato, ma di uguale larghezza: il seno totale dicasi ancora $= R$, il seno d'inclinazione $= s$, la potestà dell'iperboloide $= p$, la portata $= q$ farà ancora $R : S :: p : q^2$; ma nel primo di questi due canali, essendo $R : S :: P : Q^2$, si è ancora $R Q^2 = P S$, e per la stessa ragione nel secondo, si ha $R q^2 = p s$: farà dunque $R Q^2 : R q^2 :: P S : p s$, ed ancora $Q^2 : q^2 :: P S : p s$, cioè i quadrati delle diverse portate faranno in ragione composta delle potestà degli iperboloidi, e dei seni d'inclinazione: ma in un medesimo canale essendo $S = s$, farà ancora $Q^2 : q^2 :: P : p$, e $Q : q :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$, cioè le portate del medesimo canale in diversi tempi, faranno nella ragione sudduplicata delle potestà de' rispettivi iperboloidi generati dalle diverse altezze vive, prese nelle

medesime sezioni; e nei canali di fondo orizzontale, potendo variare le cause acceleranti del moto, come coll'accreverfi, o diminuirfi l'altezza viva con l'avvicinarsi, o l'allontanarsi de' sbocchi, o col farsi dei nuovi, ed otturarfi dei primi ec. possono altresì variare i valori delle tangenti degli angoli d'inclinazione equivalente alle forze acceleranti. Quindi, se in uno di cotai canali il seno totale dicasi $= R$, la tangente $= T$, la poretà $= P$, la portata Q , sarà $R : T :: P : Q^2$, e se in altro tale dicasi ancora R il seno totale, e la tangente $= t$, la poretà $= p$, la portata $= q$ sarà pure $R : t :: p : q^2$. Dalla prima di queste analogie ricavali $RQ^2 = PT$, e dalla seconda $Rq^2 = pt$: quindi $RQ^2 : Rq^2 :: PT : pt$, od anche $Q^2 : q^2 :: PT : pt$, cioè i quadrati delle portate saranno in ragione composta della poretà degl'iperboloidi, e delle tangenti degli angoli d'inclinazione equivalente alla forza accelerante: e se al variarfi delle correnti non varieranno le forze acceleranti in cadun canale, cioè se sia $T = t$, avrassi $Q^2 : q^2 :: P : p$, e $Q : q :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$, che se i due canali, che si paragonano tra di loro, avranno diverse larghezze Ll , batterà dividerne, od intendere divise le portate per le rispettive larghezze, acciocchè Q, q rappresentino i complessi delle celerità.

E poichè ne' canali di fondo inclinato si ha $R : S :: P : Q^2$, onde sia $RQ^2 = PS$, e nei canali di fondo orizzontale si ha $R : T :: p : q^2$; onde sia $Rq^2 = pT$, sarà $RQ^2 : Rq^2 :: PS : pT$, ed ancora $Q^2 : q^2 :: PS : pT$, cioè i quadrati delle portate in un canale inclinato, ed in altro di fondo orizzontale, saranno in ragione composta delle poretà de' rispettivi iperboloidi, e del seno d'inclinazione in quello, alla tangente di equivalente inclinazione in questo.

Che se pongasi $Q = q$, cioè, se un canale medesimo vari d'inclinazione, senza variarfi la quantità corrente, sarà allora $PS = ps$, e $P : p :: S : s$, cioè la poretà degli iperboloidi saranno reciprocamente, come i diversi seni d'inclinazione; così pure, se sia $Q = q$ in un canale di fondo orizzontale.

orizzontale, in cui senza variazione della quantità corrente, si variino le forze acceleranti Tt , avrassi ancora $PT = pt$, e $P : p :: t : T$, cioè le potestà saranno reciprocamente, come le forze acceleranti; e finalmente, se $Q = q$; ma l'una in un canale inclinato, e l'altra in un canale di fondo orizzontale, farassi allora $PS = pt$; e quindi $P : p :: t : S$, cioè le potestà de' rispettivi iperboloidi faranno reciprocamente come la tangente dell'equivalente inclinazione nell'orizzontale, al seno della vera inclinazione nell'inclinato.

20 Nel caso dell'ascissa x comune ai due iperboloidi, facendosi i quadrati delle ordinate proporzionali alle potestà, cioè $y^2 : z^2 :: P : p$, farà ancora $y : z :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$; e perchè, dove $S = s$, oppure $T = t$, od anche $S = T$, farassi ancora $Q^2 : q^2 :: P : p$, $Q : q :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$, farà ancora $y : z :: Q : q$, cioè farà questo il caso delle quantità proporzionali alle altezze vive.

Nelle medesime supposizioni di $Q^2 : q^2 :: P : p$, se le ascisse de' due iperboloidi sieno x , ed u , e le corrispondenti ordinate sieno y , z , farà altresì $xy^2 : uz^2 :: Q^2 : q^2$, e $y \cdot \sqrt{x} : z \cdot \sqrt{u} :: Q : q$, ove ponendosi ancora $y = z$ farassi $\sqrt{x} : \sqrt{u} :: Q : q$, cioè le quantità saranno proporzionali alle celerità, come vorrebbe il Genneté; ma quando $y = z$, le due curve si segano nel solo punto estremo dell'ordinata comune. Dunque questo è il solo caso, in cui si verifichi corale ipotesi.

In oltre, perchè $Q^2 : q^2 :: PS : ps$, oppure $PT : pt$, od anche $PS : pT$, e però ancora $Q^2 : q^2 :: xy^2 S : ux^2 s$, oppure $xy^2 T : ux^2 t$, o come $xy^2 S : ux^2 T$, quando $xS : us$ farà come $y^2 : z^2$, farassi $Q : q :: y^2 : z^2$, cioè le quantità proporzionali ai quadrati delle altezze, e conseguentemente le celerità proporzionali alle altezze medesime, che è l'ipotesi del Castelli. Lo stesso dicasi, quando farà $xT : ut$, oppure $xs : uT :: y^2 : z^2$.

I diversi tratti di curva, in cui componesi la superficie di una corrente in diversi luoghi, ed in diversi tempi, ne mostrano l'andamento delle sue diverse cadenti verso lo sbocco,

K

e come ogni piccolo alzamento, od abbassamento di superficie vicino allo sbocco, cagionato da accrescimento, o da scemamento d'acqua nelle parti superiori del fiume, sia un indizio di un alzamento, od abbassamento molto maggiore in lontananza dallo sbocco medesimo, come dopo il Castelli osservarono alcuni celebri matematici.

Poichè $RQ^2 = PS$, oppure $= PT$, è chiaro, che se delle quantità R , Q , P , S , oppure T , tre sieno date, sarà pure data la rimanente, ed in canali diversi avendosi $Q^2 : q^2 :: PS : ps$, anche ivi dati tre di codesti termini, sarà pure dato il quarto; lo stesso dicasi dell' analogia $Q^2 : q^2 :: PT : pt$, e nel caso di $S = s$, e di $T = t$, facendosi allora $Q^2 : q^2 :: P : p$, anche ivi dati tre termini, si può sempre avere il quarto.

Dunque, se in alcuna esperienza ben accertata si conosceranno le quantità tutte Q , P , S , oppure T , e nel medesimo canale, ma in altro stato di acque si misurino due sezioni colla distanza tra esse, si conoscerà sempre la potenza p , e quindi q se sia incognita, ed all'opposto se sia nota q , conoscerassi p , e conosciuta p , se dividerassi per il quadrato dell' altezza della sezione, il quoziente sarà la distanza della medesima dal centro dell' iperboloide; o dividendosi p per la distanza della sezione dal centro, e dal quoziente estraendosi la radice quadrata, sarà quella la nuova altezza viva della corrente.

Ed essendo note le quantità Q , P , S , oppure T per l'osservazione di due sezioni in un fiume, o canale, potrà sempre ritrovarsi l'accrescimento, o la diminuzione delle altezze vive nelle sezioni medesime, se sia nota la quantità aggiunta, o derivata q , perchè sarà nota $Q + q$, ed all'opposto, se si osserveranno le altezze delle sezioni medesime, dopo che sarassi aggiunto, od estratta qualche quantità di acqua, conoscerassi l'aggiunta, o la derivata: perchè conoscerassi la nuova potenza p , ed essendo note P , p , e la quantità prima Q sarassi nota la quantità accresciuta, o diminuita $Q \pm q$.

21 Quindi conosciuta la celerità medìa, la portata, e l'inclinazione di un tratto di fiume, o di canale, si conoscerà ancora la forza della sua corrente in esso tratto, ed ancora la forza della medesima, quando verrà arricchita, od impoverita di acque, o che per il prolungamento, o scorciamento dell'alveo susseguente, od antecedente, o per altro noto accidente, si sia diminuita, od accresciuta la naturale inclinazione, o pendenza dell'alveo. Perciò, se con sicure osservazioni si sia conosciuto, che un tratto di fiume posto in un tale stato, cioè avendo un tale determinato grado di forza, asportar possa una data spezie di torbida, o di altra materia, potrássi con qualche fondamento giudicare, se nel nuovo stato sia, o no capace di fare lo stesso, e coll'accreverne, o diminuirne la pendenza, o la quantità, di quanto se ne accresca, o diminuisca la forza.

Dunque se codeste teorie verranno accompagnate da sicure osservazioni ne' casi particolari di un tratto di fiume, o di un canale, avrássi pure sufficiente fondamento per prevederne gli effetti, ogni qualvolta si alteri alcuna delle condizioni del primiero suo stato. Non mi diffondo in riflessioni, o considerazioni de' casi particolari, nè in esempj in un argomento così vasto: parendomi, che per coloro, che sono in questa materia intendenti, e sperimentati, si sia detto quanto bisogna, poichè coloro, che tali non sono, non deggiono in verun modo ingerirsene, gli errori in questo genere di cose riuscendo per lo più di troppo grave pregiudizio al pubblico, ed ai particolari.

Osservazioni sopra il movimento dell' acqua , che passa per un regolatore.

22 **N**Elle varie sperienze fatte negli anni scorsi col regolatore, si videro alcuni fenomeni nel movimento dell' acqua, che passava sotto la cateratta, che pareano degni di attenzione; ma perchè non ci volevamo allora distornare dallo scopo prefissoci di determinare le celerità, e le quantità decorrenti: riservammo ad altro tempo cotali osservazioni. Consistono queste principalmente in due cose: la prima, che uscendo l'acqua di sotto la cateratta con grandissima velocità, questa nel progresso per un canale orizzontale vassi ralleniando dalla continuazione di uniformi resistenze del fondo, e delle sponde conseguentemente la di lei superficie vassi innalzando, e facendosi acclive, il che è affatto conforme alla ragione: mentre per ogni sezione passar dovendo la quantità stessa, se in progresso la celerità media vada diminuendo, è necessario, che crescano le altezze, il che parrà forse strano a taluno. L' altra è, che giunta l'acqua ad una certa distanza, ove più non movefi con tanta celerità, diminuisce altresì la forza di sospingere innanzi quella, che la precede; seguendo tra queste un assai visibile contrasto, che manifestasi dal ringurgito della precedente più elevata sopra la susseguente più bassa, in modo, che tende quella a portarsi all' indietro verso la cateratta; e questa ad allontanarnela, finacchè raggugliate esse forze, mantienfi il ringurgito nello stesso sito, come in equilibrio tra le medesime.

S P E R I E N Z A P R I M A.

Alli 26. ottobre 1768., avendosi alle quattro scale le altezze di pollici 12. 11., 12. 7., 11. 7., 9. 8. calossi la cateratta, lasciandovi sotto l' apertura di sei pollici, l' acqua

gonfiando giunse alla totale altezza di pollici 11. 6. facendo un battente di pollici 16. 6.

In questo stato di cose, l'altezza della corrente alla prossima terza scala distante piedi 7. pollici 6. dalla cateratta, non era che di pollici 4. 6., ed alla distanza di piedi 10. dalla cateratta di pollici 5. 3., ed all'ultima scala trovossi di pollici 9. 8., ed il ringurgito mantennesi distante piedi 15. 6. dalla cateratta.

La portata della corrente, calcolata ivi col regolatore trovassi di piedi cubici 6. 0. 3., l'effettiva essere dovendo alquanto meno di piedi 5. 10. 9., secondo la sperienza terza del n. 10., oppure 5. 10. 7., giunta il computo fatto colle due scale inferiori.

2.^a

A' 16. Settembre, lasciati pollici 5. sotto la cateratta, la totale altezza dell'acqua dal fondo sino alla superficie stagnante si fece di poll. 11. 2., facendo un battente di pollici 16. 2., intanto l'altezza alla prossima terza scala non era che di poll. 4., alla quarta, ed ultima si mantenne di pollici 9., senza vederfi ringurgito.

3.^a

A' 16. Ottobre avendosi alle quattro scale le altezze di pollici 11. 0., 10. 6., 9. 9., 8. 0., lasciaronsi sotto la cateratta pollici 5., e l'acqua contro essa innalzossi poll. 17. 3., facendo un battente di pollici 12. 3., l'altezza della corrente alla prossima terza scala, non fu che pollici 3. 10., ed il ringurgito trovossi alla distanza di circa piedi 15.

Calcolata con queste dimensioni la portata trovassi di piedi cubici 4. 4. 4. 6. per minuto secondo, assai concorde alla ritrovata in diverse maniere nella settima del n. 10.

4.^a

Nello stesso giorno stando ferme le altezze medesime della corrente, lasciaronsi sotto la cateratta solamente pollici quattro, con che l'altezza totale dell'acqua si fece di pollici 13. 9., ed un battente di pollici 19. 9.; l'altezza alla prof-

prima scala si fece di pollici 3. 2.; alla distanza di piedi 12. l'altezza osservossi di pollici 3. 6., ed all'ultima scala si mantenne costantemente di pollici 8., il rigurgito trovossi distinto dalla cateratta circa piedi 30.

Calcolata anche ivi la portata con queste dimensioni, trovassi di piedi cubici 4. 4. 0.

5.^a

Nello stesso giorno lasciandosi sotto la cateratta solamente pollici 3.; la totale altezza dell'acqua fecefi di pollici 18., ed il battente di pollici 15., l'altezza della corrente alla prossima scala osservossi di pollici 2. 6., e la distanza del rigurgito di circa piedi 32., ed a' 26. Settembre avendosi alle quattro scale le altezze di pollici 10. 4., 10. 1., 9. 4., 8. 2., lasciando sotto la cateratta un'apertura alta 3. pollici, la totale altezza fa pollici 26. con battente di pollici 23., la distanza del rigurgito di piedi 30. Di queste, e della seguente non si sono calcolate le portate, perchè non sono state fatte, come richiedesi per un tal effetto.

6.^a

A' 26. Ottobre 1768. avendosi alle quattro scale le altezze di pollici 8. 6., 8. 0., 7. 5., 6. 1., e lasciati due pollici sotto la cateratta, si fece la totale altezza dell'acqua di pollici 22. 6., e quindi un battente di pollici 20. 6., l'altezza della corrente alla prossima scala trovossi di pollici 10., ed alla distanza di piedi 16. dalla cateratta, di pollici 2. 4., ed il rigurgito si tenne lontano piedi 18., ed a' 26. Settembre avendosi pure due pollici sotto la cateratta: l'altezza totale dell'acqua ritenuta di pollici 24. 3., alla prossima scala di pollici 2. 6., all'ultima di pollici 4., ed il rigurgito si vide distante circa piedi 47.

Nel precedente anno 1767. se ne fece pure alcuna di simili sperienze, le quali però non deggionsi tra queste annoverare, poichè allora non erasi per anco reso ben orizzontale il fondo del canaleto; ma trovavasi alquanto acclive.

Così a' 22. Ottobre, lasciati solamente tre pollici sotto la cateratta, si fece l'altezza totale dell'acqua di pollici 15. 8.,

e però il battente di pollici 12. 8. In quali circostanze il rigurgito si tenne lontano dalla cateratta circa piedi 5., ed abbassata ancora di un pollice la cateratta, si fece l'altezza totale di pollici 23., ed il battente di pollici 21., ed il rigurgito si tenne lontano circa piedi 9. 6., ed in tutto il tempo di queste sperienze si mantenne all'ultima scala l'altezza di pollici 7. 3.

7.^a

Nell'anno 1769. si fecero le seguenti.

Alli 27. Settembre avendosi alle quattro scale le altezze di piedi 12. 0., 11. 6., 10. 9., 8. 3. sotto la cateratta del regolatore si lasciò una luce di pollici 4. Dopo un certo tempo l'acqua ritenuta contro la cateratta si rese alta pollici 27., ed il rigurgito si mantenne lontano piedi 45. 9.

Fatto il computo della portata effettiva col regolatore, questa trovasi di piedi cubici 4. 6. 2., e colle due ultime scale trovasi di piedi cubici 4. 7. 6.

8.^a

A' 19. Ottobre avendosi alle quattro scale le altezze di pollici 13. 9., 13. 0., 12. 3., 10. 4. applicossi il tubo Pitot alla seconda scala, facendosi quattro immersioni nel mezzo, ed altrettante nella sponda coll'intervallo di quattro pollici tra l'una, e l'altra cominciando dal fondo, le altezze totali nel mezzo furono pollici 14. 0., 14. 8., 15. 4., e nella sponda furono pollici 13. 9., 14. 3., 14. 8., 14. 6. Quindi l'altezza media tra tutte fasce di pollici 14. 5. 8., o dicasi 14. 6., da cui sottraendo l'altezza viva della corrente, rimane l'alzamento medio dell'acqua nel tubo sopra la superficie esterna di pollici 1. 6., che dà una celerità di piedi 2. 9. 0. per minuto secondo, i quali moltiplicati per l'area della sezione di piedi quadrati 2. 2. 0. danno la portata effettiva di piedi cubici 5. 11. 6. per minuto secondo.

Fatto il computo colla terza, e quarta scala trovasi la portata effettiva di piedi cubici 6. 0. 8.

Fatto il computo della medesima col regolatore, dove l'altezza tutta della stagnante contro la cateratta era di pol-

lici 22. 2., la luce sotto la cateratta di pollici 5., trovasi la portata di piedi 5. 6. 6., ed il ringurgito trovasi distante dalla cateratta per piedi 2. 7.

Scaricandosi poscia tutta la corrente nelle vasche, nel tempo di quattro min. primi, si ebbero nelle vasche piedi cubici 1426., che divisi per secondi 240., danno la portata effettiva di piedi cubici 5. 11. 3. per minuto secondo.

9.^a

A' 20. Ottobre avendosi alle quattro scale le altezze di pollici 8. 6., 8. 2., 7. 9., 6. 3., scaricata la corrente nelle vasche nel tempo di minuti primi 9., si ebbero piedi cubici 1527., che divisi per minuti secondi 540., danno la portata effettiva di piedi 2. 10. per secondo, la medesima calcolata colle due ultime scale trovasi di piedi cubici 2. 11. 3. per secondo.

OSSERVAZIONI.

1.^a

23. **O**ltre all'acclività della superficie nella corrente fuori della cateratta, egli è manifesto, che il ringurgito, o sia visibile contratto tra l'acqua susseguente più veloce, e la precedente più lenta, seguir dee, ognorchè la susseguente più forza non ha a sospingere la precedente; ma dove, e quando esso succedere debba, non è così facile a determinarsi. Dipendendo l'equilibrio da due forze pure assai difficili a misurarsi: l'una dell'acqua, ch' esce di sotto la cateratta, la quale va crescendo a misura, che si fa più alta la stagnante dietro la cateratta, e nello stesso tempo va diminuendo per le resistenze, che immediatamente soffre contra il fondo, o le sponde, e molto più dalla precedente più lenta, e di massa maggiore. L'altra è della precedente medesima, la quale altre resistenze dee vincere prima di stabilire il suo corso. Intanto anche qui osservasi ciò, che in altri luoghi abbiamo accennato, cioè quanto facilmente l'acqua corrente cangi di velocità, comechè obbedientissima a tutte le leggi della natura, da

da noi pure conosciute, od osservate, onde rendesi sommaramente difficile codesto soggetto a ben trattarsi con teorie generali, e sicure. Con tutto ciò proseguiamo ancora qualche poco codeste considerazioni.

2.^a

La superficie acclive dell'acqua, che vassi uniformemente rallentando di moto, dovrà pure comporsi giusta un iperboloide posto al contrario di quando essa va accelerandosi: mentre anche ivi per ogni sezione passa la quantità medesima; e tale iperboloide può determinarsi nella stessa maniera; cioè colla osservazione di due altezze, e della distanza tra esse, presa nello intervallo del regolare rallentamento; e la di lui massima elevazione sopra il fondo cadrà nel sito dello stesso ringurgito.

3.^a

Se nell'acqua stagnante in un vaso, o canale (*tav. 1. fig. 4.*), si cali una cateratta FH non fino al fondo CD , ma solamente ad una certa profondità GH sotto la superficie AB , è chiaro, che dalle due bande AG , GB comporrassi la superficie in un medesimo piano orizzontale; ma se dalla parte superiore AC scorra l'acqua verso l'inferiore BD con qualche celerità: allora la parte immersa GH impedirà il progresso libero della porzione superiore AH , e solamente continuerà a scorrere la porzione inferiore CH sotto la rimanente altezza HL con qualche alterazione però della sua primiera celerità. Imperciocchè ponendosi costante il corso libero dell'acqua dopo l'abbassamento della cateratta più non potendo scorrere tutta per la sezione diminuita, è d'uopo, che la ritenuta gonfi, e s'innalzi, se a lei lo permettono le sponde senza spandersi, o volger altrove il corso. Codesto alzamento però è limitato dall'altezza della pressione, o della discesa, che ne genera la celerità; e dovrà terminarsi come in EF , dove l'aumento attuale della pressione tanto ne accresca la velocità primiera in HL , che sotto quell'altezza uniformemente possa scaricarsi tutta quella, che passava per la sezione

L

ne libera. In qual caso la celerità accresciuta alla primiera starà precisamente come GL ad HL .

4.^a

E poichè in una sezione libera, posta immediatamente sotto al pelo orizzontale di un' acqua come stagnante, il centro delle velocità, o dicasi la celerità media, trovasi ai quattro noni della profondità sotto la superficie, e nelle sezioni libere poste sotto a qualche altezza dalla superficie orizzontale, esso centro, o velocità media, più si abbassa, e si avvicina alla metà della profondità tutta, senza però mai potervi arrivare (teoricamente parlando). Perciò nei canali inclinati, e nel regolatore, quando l' altezza sotto la cateratta è di molto minore del battente, senza pericolo di errore sensibile, la celerità media potrà prenderfi alla metà dell' altezza. La cosa è assai nota, ma per coloro, per cui tale non fosse, fingasi, che sotto la cateratta abbiassi un' altezza di parti 3., ed il battente sia di parti 6., e però l' altezza tutta dell' acqua ritenuta contro la cateratta, di parti 9.; se il computo si faccia col metodo geometrico, il complesso delle celerità sarà poco più di $8. \frac{4}{7}$, e la celerità media poco più di $2. \frac{11}{11}$, e fatto il computo col metodo meno geometrico, ma assai più facile poc' anzi accennato, il complesso delle celerità trovasi di $8. \frac{10}{100}$, e la celerità media poco meno di $2. \frac{21}{100}$, e tanto più insensibile farassi il divario, quanto maggiore sarà il battente rispetto all' altezza lasciata sotto la cateratta.

5.^a

Se l' acqua uscente di sotto la cateratta prosegue il suo corso in un canale di fondo inclinato, cosicchè l' aumento di celerità prodotto dalla discesa, si uguagli al decrescimento cagionato dalle resistenze, è chiaro, che continuerassi il movimento colla celerità, che avea all' uscire di sotto la cateratta, e che farassi ancora maggiore, se maggiore sia la declività del fondo, non così dove essa acqua scorrere debba per un canale di fondo orizzontale; e perchè quivi

possono darfi più casi, esaminiamoli un per uno: avvertendo però, che ciò che qui si dice di un'acqua, che esce di sotto una cateratta, dee intendersi di un'acqua qualunque, che per una data apertura esca da una conserva di acque, in cui stabilmente conservisi la stessa superficie orizzontale; poichè il caso del più, o del meno, od anche del niun battente viene sempre compreso dalla regola generale del movimento libero delle acque.

6.^a

Un canale orizzontale di fondo può essere più, o meno esteso, chiuso, od in parte, o pure affatto aperto nella sua estremità. Nel caso che aperto sia nella sua estremità, sicchè libero sia lo sbocco, apparisce chiaramente dalle narrate sperienze, ed è cosa affatto alla ragione conforme, che quanto più lungo sarà il viaggio, tanto maggiori saranno le resistenze dei stropicciamenti, se non altre, da vincere; e tanto maggiore il corpo, che dovrà sospingere avanti di sé l'acqua, che successivamente entra nel canale; e perciò tanto più lentamente moverassi, ben lontana dal moverfi colla velocità media, che le assegna la volgare teorica, cioè con quella, che corrisponde ai quattro noni dell'altezza viva, il che non può verificarsi, che nelle sezioni libere, nelle quali niuna resistenza si fa alla pressione, appunto come nelle suddette sperienze si è osservato, nelle quali avendosi più volte dieci, dodici e più pollici di altezza viva verso la parte superiore del conduttore, trovossi di fatto, che moveasi l'acqua con una celerità corrispondente appena a qualche pollice, e talora a poche linee di di discesa, nè può replicarsi, che siccome la celerità ritrovata dovrebbe ridurre all' $\frac{1}{16}$, così la caduta ridurre debbasi al quadrato di $\frac{1}{16}$, o sia $\frac{1}{256}$, cioè delli $\frac{1}{16}$ dell'altezza, doverlene prendere li $\frac{1}{16}$, perchè ciò non farebbe diverso dal prenderfi in fine li $\frac{1}{16}$ della portata ritrovata, il che solamente dee farfi, quando si calcola colla celerità massima, come altrove si è spiegato.

In questi casi gioverà sapere da qualche speriienza, di quanto sia scemata la celerità prima di un dato corpo di acqua a cagione del solo strofinamento contro il fondo, e le sponde, dopo avere percorso un noto spazio, affine di potere a un dipresso determinare quanto sia per diminuirsi la celerità prima di un altro dato corpo di acqua, dopo che avrà percorso un altro spazio dato, e colle medesime circostanze, e condizioni. Nella ipotesi, che le celerità perdute sieno in ragione composta della celerità prima, dello spazio percorso, e della reciproca dell'altezza viva, cioè se V sia la velocità prima, v la residua, A l'altezza viva al principio dell'introduzione, S lo spazio percorso; sarà la celerità estinta $V - v$, come $\frac{VS}{A}$; quindi nella speriienza conoscendosi V , v , A , S , se in un altro canale, dicasi U la celerità prima, u la residua, a l'altezza dell'acqua sul principio del corso, s lo spazio, sarà pure $U - u$ come $\frac{Us}{a}$, onde, se alcuna di queste U , u , a , s sia incognita, potrà ritrovarsi colle altre date, e colla speriienza.

Se la estremità del canale di fondo orizzontale pongasi chiusa insuperabilmente: l'acqua ivi pervenuta senza poter più oltre proseguire il suo corso, premerà la chiusura medesima, e continuamente alzandosi di corpo per la sopravveniente, tenderà a ritornarsene verso il principio, fatta già più alta della prima; intanto tra l'una, e l'altra riempiesi il canale a segno, che se le di lui sponde sieno bastanti a contenerla, porterassi a livello della stagnante contro la cateratta, o a livello del principio della discesa. Ove giunta cesserà affatto ogni di lei moto progressivo, comechè costituita da ambe le parti in equilibrio.

Che se l'ostacolo, o la chiusura possa superarsi dall'acqua alzata sopra la medesima, chiaro è, che quel parallelepipedo di acqua, che ha per base il fondo orizzontale del canale, e

per altezza quella della chiusura, non potrà progredire, quantunque dalla superiore non sia lasciata in un assoluto riposo, mentre quella, che è più prossima all' ostacolo, vedesi avere una assai sensibile celerità, liberamente stramaz-
zando dal ciglio del medesimo. A questo proposito da noi più volte fu osservato, che la superficie dell' acqua rialzata dalla chiusa ha sempre qualche inclinazione verso lo sbocco. Ciò particolarmente si osservò li 26. Ottobre 1767., poichè scorrendo l' acqua coll' altezza di pollici 8. alla prima scala, e di pollici 6. all' ultima, si chiuse il canaletto con un asse posto fra gli ultimi incastri, distanti dalla cateratta piedi 49. 10., e dall' ultima scala piedi 2. 8. 6. L' altezza dell' asse sopra il fondo era di pollici 12. 4. con ciò gonfiossi l' acqua fino allo scaricarsi equabilmente dalla sommità del sostegno in altezza di pollici 4. 6. Vero è però, che per gl' interstizj scappavane qualche quantità, la quale però non parve, che di tanto scemare potesse la prima libera altezza di poll. 6. 6.: quindi venni in pensiero di esaminare donde procedesse tale scemamento di altezza sopra il sostegno, che pure forzavala ad alzarfi oltre ad un piede sopra del fondo. E intanto si osservò, che la superficie non era veramente orizzontale, ma inclinavasi verso il sostegno circa tre linee nello intervallo di 100. piedi.

Con maggiore diligenza si rinnovò questo sperimento li 6. di Luglio 1769., in qual giorno scorreva l' acqua facendo alle quattro scale le altezze di poll. 12. 9., 12. 3., 11. 3., 9. 11. Si chiuse come sopra il canaletto, e stabilito dopo un certo tempo lo stato dell' acqua, le altezze divennero di pollici 22. 8., 22. 7., 22. 3., 22. 1., di sorta che la superficie inclinava circa linee 7. nello intervallo di 100. piedi. Sottraendo l' altezza dell' asse di pollici 12. 4. dall' ultima di queste di pollici 22. 1., rimane l' altezza viva della corrente nello stesso sito di pollici 9. 9. minore della prima 9. 11., e sopra la sommità del sostegno appena giugneva a pollici 8. 9., dove già erasi incurvata la superficie per la prossima libera cascata.

Mentre così era rattenuta la corrente, lungo al fondo andossi adattando il tubo Pitot, nel quale salì sempre l'acqua a qualche linea sopra la superficie eiteriore, fuorchè ad una distanza di circa un piede dal sostegno. Dimostrandoci con quei piccoli alzamenti, che in vicinanza del fondo avea ancora l'acqua un movimento sensibile.

A' 13. Ottobre dello stesso anno avendosi alle quattro scale le altezze di pollici 6. 10., 6. 4., 6. 0., 4. 10.

1° Si calò la cateratta lasciandovi sotto una luce alta pollici tre. Dopo un certo tempo l'acqua rattenuta si fe' contro la cateratta alta pollici 9., cioè fece ivi un battente di 6. pollici.

2° Si chiuse come sopra il canaletto, e stabilitosi dopo un certo tempo lo stato dell'acqua tra la cateratta, ed il sostegno; superiormente alla cateratta osservossi un'altezza sensibilmente uniforme di pollici 11., ed inferiormente vicino alla cateratta di pollici 15. 6., crescendo da lì innanzi fino a farli di pollici 16. 5. vicino al sostegno, e l'altezza della corrente sopra al piano orizzontale tirato per la sommità del sostegno di pollici 4. 1.

3° Stando le cose in questo modo adattossi al tubo Pitot sotto la cateratta, ed in essa salì pure l'acqua a pollici 11.

4° Qui si osserva, che la pressione media dell'acqua nella luce sotto alla cateratta essendo di pollici 7. e mezzo in circa, la impedita era di pollici 19. e mezzo colla differenza di pollici 12., pressochè uguale all'altezza dell'oitacolo.

A' 19. Ottobre da sera avendosi le quattro altezze di pollici 13. 9., 13. 0., 12. 3., 10. 4., si chiuse il conduttore nello stesso luogo con un altro asse, elevato sopra il fondo pollici 10. 10., e l'acqua sopra esso era alta circa poll. 9.

Codesto fenomeno, si è pur frequente a vederli: poichè correndo talvolta un grosso corpo di acqua per un canale, o fiume coll'altezza viva eziandio di più piedi, con tutto ciò, se avvenga, che l'alveo tutto si attraversi con una peccaia, o sostegno, dopo che l'acqua rattenuta si è sollevata fin sopra all'oitacolo, e disposto il suo pelo all'indietro in

un piano quasi orizzontale, pure scaricasi uniformemente dal ciglio del sostegno sotto un'altezza soventi*minore di quella, che avea, quando liberamente correva pel suo alveo.

Pensando al come ciò possa spiegarsi senza ricorrere a nuovi principj, e leggi nel movimento dei fluidi, o ad altre tali sottigliezze: considero in primo luogo, che sebbene la pescaia, od il sostegno attraversando l'alveo, tengasi in collo un prisma di acqua alto quanto la pescaia stessa, essa però ristigne l'alveo; e se per una parte diminuisce la declività totale del tronco superiore, diminuisce altresì di molto, anzi toglie affatto la resistenza, che fa l'acqua antecedente alla susseguente, per cagione della quale resistenza la pressione laterale poco, o nulla esercita l'azione sua, ed il movimento producesi pressochè tutto dalla sola declività dell'alveo, il che ad evidenza rilevasi dalle nostre sperienze, e perciò quantunque la pescaia diminuisca il moto prodotto dalla declività, ne aggiunge però quello, che poco, o nulla producevasi dalla pressione laterale; succedendo ivi, se pur mi appongo al vero, ciò, che succede all'acqua versata in qualunque copia in un vaso senza fondo, in cui essa tanto diminuisce di mole, quanto si accelera, col solo divario, che nel vaso senza fondo la gravità agisce verticalmente, e qui lateralmente ma però colle stesse leggi; e siccome nel vaso senza fondo, comunque l'acqua influente riempia sul principio la capacità del vaso, con tutto ciò ella esce dal fondo sempre in minor volume, e tanto minore, quanto maggiore si è l'altezza del vaso stesso: così, quantunque grande sia la quantità dell'acqua, che dalla parte superiore alla pescaia viene somministrata, giunta che sia in vicinanza al ciglio medesima, di là trabocca senza ritegno in maniera simile a quella, con cui esce dal vaso senza fondo, nel quale non è possibile che punto si trattenga, e formi una anche menoma stabile altezza, come si disse altrove, così qui non è possibile, che facciasi accrescimento di altezza viva sopra la necessaria al volume, che dee liberamente stramazze dal sostegno. Un'altra cagione concorre al medesimo effetto, ed

è, che l'acqua che muovesi sopra il piano orizzontale, od inclinato, che passa pel ciglio del soitegno, muovesi sopra l'acqua istessa, e perciò risente molto minore resistenza, che scorrendo pel fondo soventi aspro, od irregolarè dell'alveo, e per quello ancora riducesi in minor volume.

- 24° Evvi ancora qualche dubbio circa l'uso del regolatore, ed è il sapere, se la celerità dell'acqua sotto la cateratta sia effetto della sola pressione della soprastante, oppure vi rimanga ancora qualche parte di quella che avea quando tutta liberamente scorreva; affine di procedere con chiarezza in questa ricerca, riflettasi, che pressioni, e libere discese uguali producono celerità uguali, e che queste sono sempre nella ragione sudduplicata di quelle, onde senz'alterazione delle celerità possono sostituirsi l'una all'altra, cioè la pressione alla discesa, e scambievolmente la discesa alla pressione.

In oltre tanto l'una, che l'altra di queste cagioni di acceleramento, comechè effetti della sola gravità, agiscono, o tendono ad agire con le medesime direzioni al centro dei gravi; quindi il moto progressivo dell'acqua per un canale orizzontale, od inclinato, nasce da principio dalla pressione laterale, che la spigne fuori del recipiente, e questo principio di movimento fassi appunto maggiore, o minore, secondo che maggiore, o minore si è la medesima pressione laterale, e minore, o maggiore la resistenza alla di lei azione. Quindi anderassi rallentando il movimento, se per notevole tratto scorrere debba l'acqua per un canale orizzontale di fondo, o anderassi accelerando, se scorrerà per un canale declive.

Egli è poi anche certo, che le celerità medie della corrente libera, e della forzata sotto la cateratta, sono reciprocamente come l'altezza diminuita per l'abbassamento della cateratta all'altezza della corrente libera. Dunque le forze generatrici di cotali celerità saranno ancora reciprocamente come i quadrati delle altezze medesime: di modo che, se l'altezza della corrente libera dicasi $= a$, l'altezza diminuita sotto la cateratta $= b$, faranno le celerità come $b : a$,
e le

e le forze generatrici, come $b^2 : a^2$, e se quella, che produce il moto libero, sia $= x$, quella, che produce il violento sotto la cateratta, farà $\frac{a^2 x}{b^2}$; ma a è maggiore di b , dunque $\frac{a^2 x}{b^2}$ è maggiore di x : ora, se $\frac{a^2 x}{b^2}$ sia la sola pressione, essa potrà attualmente misurarsi, poichè corrisponderà all'altezza perpendicolare compresa tra la superficie orizzontale della ritenuta, e stagnante, ed il centro delle velocità dell'apertura sotto la cateratta, il qual centro, quando il battente è molto maggiore dell'altezza sotto la cateratta coincide sensibilmente col centro di grandezza, cioè trovasi alla metà dell'altezza sotto la cateratta. Sia perciò essa altezza, o pressione detta $= f$, che, se questa sia la sola cagione della velocità dell'acqua sotto la cateratta, dovrà essere $\frac{a^2 x}{b^2} = f$, e perciò $f > x$, come a^2 è $> b^2$; ma se vera sia quella dottrina comunemente seguita da più celebri matematici, che di queste due cagioni di moto, cioè discesa, e pressione, la più forte produca tutto il moto, senza che vi abbia parte alcuna la più debole, dunque ec. Ma di questo appunto si dubita: cioè, se generalmente il moto di una corrente debba tutto ascriversi alla più forte di queste due cagioni, senza che v'abbia parte alcuna la più debole.

- 25 Anzi tra più moderni scrittori evvi l'autore della bellissima dissertazione sopra i torrenti, posta sul principio del settimo volume della raccolta di Parma, il quale è di sentimento, e dimostrar vorrebbe, che la pressione sempre concorre all'acceleramento delle acque nei canali eziandio inclinati: impugnando in questo particolare la dottrina del Guglielmini, che ne stabilisce il contrario, cioè che nei canali inclinati, per quali scorre l'acqua colla intera velocità, non averci parte alcuna la pressione, e procura di avvalorare questo suo assunto colla dimostrazione di un problema, che trovasi nel terzo tomo delle opere di Giovanni Bernulli, nel quale

M

questo grande matematico ne dà a divedere, che scendendo un grave per l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, posto sopra un piano orizzontale, ed amendue perfettamente lisci, acciò astrazione fare si possa da ogni stropicciamento: esso grave nel tempo medesimo, in cui discende con moto accelerato per l'ipotenusa del triangolo, spigne ancora con moto accelerato il triangolo per il piano orizzontale. Dal che ne inferisce detto scrittore, che la gravità può generare nel piano inclinato una celerità anche maggiore di quella, che produrrebbe scendendo il grave medesimo per un piano verticale: poichè al fine della discesa, la gravità stessa produce nel grave discendente la celerità medesima, come se caduto fosse verticalmente; e nello stesso tempo produce ancora il movimento accelerato del triangolo; ma codeste due celerità insieme sono maggiori di quella sola, che la gravità avrebbe generato nella discesa verticale, dunque ec.

Il paragone di questi moti con quelli dell'acqua corrente per un canale inclinato, non parmi molto confacente: perchè, sebbene sia verissimo, che la gravità si è la forza acceleratrice di tutti i corpi cadenti, essa però non è la specifica di ciascun corpo, ma la gravità in generale, la quale è sempre proporzionale alla quantità di materia costituente ciascun corpo, quindi è, che nel voto i corpi di qualunque specifica gravità caggiono in tempi uguali da altezze uguali, cioè acquistano celerità uguali, senza che la differenza de' pesi specifici punto ne alteri l'uguaglianza; la cosa è chiarissima, o sia che diversi corpi caggiano solitarij, oppure in un solo uniti, però tutti colla medesima direzione al comun centro de' gravi; ma se alcuno tra essi fosse obbligato ad altra direzione, o ciò che vale lo stesso, se parte di un medesimo grave, seguir dovesse nella sua discesa una direzione, ed un'altra parte fosse obbligata seguirne un'altra, allora ciascuna di queste dovrà considerarsi come un corpo solitario, che tende a discendere come può, senza potersi perciò inferire, che un solo, e medesimo grave produca nello stesso tempo due diversi movimenti, da potersi consi-

derare come generati da una sola, e medesima quantità di materia, questo è ciò, che succede nel problema del Bernulli, dove il peso assoluto del grave sopra l'ipotenusa del triangolo risolvesi naturalmente in due parti, con l'una delle quali viene sollecitato alla discesa, mentre coll'altra preme normalmente l'ipotenusa del triangolo, il quale per l'ipotesi, non resiste invincibilmente, e quest'altra medesima pressione di bel nuovo risolvesi in altre due, premendo con l'una verticalmente il sottoposto piano orizzontale, che invincibilmente resiste, e coll'altra orizzontalmente spigne il triangolo: essendo quella, che sollecita il grave alla discesa per l'ipotenusa, a questa, che orizzontalmente spigne il triangolo, come ingegnosamente dimostra il Bernulli, in ragione composta della ipotenusa alla base del triangolo, e della massa del triangolo col grave insieme allo stesso grave. Sono pertanto queste due forze acceleratrici fra di loro distinte, ed agiscono con diverse direzioni, talmente che l'una non ha che fare coll'altra, quantunque unite si trovino in un solo corpo, ed agiscano nel medesimo tempo; ma caduna fa il suo effetto per la direzione, che le viene concessa, in quella guisa appunto, che farebbero due gravi separati, e mossi nello stesso tempo in diversi piani, onde male conchiuderebbersi, che le velocità acquistate dai due gravi, sommate insieme fossero maggiori dell'acquistata da qualunque di essi in particolare: altrimenti, e per somigliante ragione, sommandosi insieme le celerità delle parti tutte costituenti un corpo cadente, la loro somma farebbe una celerità infinitamente maggiore di quella, che si attribuisce a tutte le parti unite, cioè al grave medesimo. Nulla adunque dal problema del Bernulli può inferirsi in favore della opinione del moderno scrittore, o in contrario alla dottrina del Guglielmini.

- 26 Dopo ciò, affine di porre nel miglior lume, che mi sia possibile questo punto, ripiglierò l'argomento dai primi principi. Certissima cosa è, che la gravità generalmente tende a spingere tutti i gravi al comun centro. Se niun ostacolo in-

contri il grave nella sua discesa, si accelera il di lui movimento giusta le note leggi; e se qualche ostacolo ne impedisca ogni discesa, allora non producefi verun moto attuale; ma il grave esercita contro l'ostacolo una pressione, o gravitazione proporzionale alla quantità di materia, di cui è composto. Che se l'ostacolo non resiste totalmente, ma cede in parte, allora segue qualche moto maggiore, o minore, secondo che minore, o maggiore è la resistenza alla libera discesa, e continuerà a farsi dal grave qualche pressione sull'ostacolo, la quale andrà diminuendo a misura, che si accrescerà la celerità nella discesa; se però costante non sia la resistenza dell'ostacolo, ma diminuisca nella stessa ragione, con cui si accresce la celerità. Dunque l'acceleramento nella discesa è l'effetto intero della gravità non impedita, e faffi generalmente con una nota legge, e costante in tutti i corpi, che discendono, qualunque siasi il loro peso assoluto, almeno nel voto, e la pressione si è pur anche l'effetto della gravità, ma impedita o in tutto, o in parte, ed è sempre proporzionale alla quantità di materia costituente il corpo tutto, o la di lui parte, di cui s'impedisce la discesa; ma nel caso di resistenza parziale, l'acceleramento della discesa segue ancora la stessa legge, che nella discesa libera, se non che faffi in tempo più lungo, siccome accade nei gravi, che discendono da pari altezze per piani diversamente inclinati. Queste leggi verificansi egualmente ne' gravi solidi, che nei fluidi, col solo divario, che nei solidi la pressione, o gravitazione si esercita nella sola direzione verticale, e nei fluidi si esercita per ogni parte: codesta pressione, o gravitazione laterale dei fluidi seguendo tuttavia le leggi medesime, che la pressione verticale, come dimostrasi nella idrostatica.

Consideriamo adesso il movimento delle acque, e in primo luogo delle decorrenti per canali di fondo orizzontale: in questi alla pressione verticale resistendo invincibilmente il fondo, non può quindi seguire verun movimento di discesa; dunque la sola pressione laterale, giusta la direzione del ca-

nale, potrà contribuire al di lei corso; ma la pressione laterale non può generare, nè conservare tutta la sua competente celerità per un lungo tratto di canale, mentre appena la produce nelle sezioni, o luci affatto libere, come all'uscire da una conserva, donde liberamente scaricasi, o viene ricevuta in un conveniente canale, che tosto s' inclina all'orizzonte; dunque, se costretta sia a scorrere per un canale di fondo orizzontale di lunga estensione, poca parte avrà la pressione laterale al movimento dell'acqua nel tronco superiore rimoto dal libero sbocco: in fatti solamente in vicinanza di questo rendesi sensibile il di lei acceleramento; e sebbene in esso tronco superiore movasi talora sensibilmente, eziandio senza il concorso di altra forza, allora troppo vi manca dal farsi esso movimento corrispondente alla pressione laterale: essendo piuttosto, o nella maggior parte, effetto del continuo accrescimento di materia, che incessantemente sopravviene dalle parti superiori, per cui qualche inclinazione acquista la sua superficie, e della contiguità, e reciproca adesione delle parti, per cui le posteriori più lente vanno succedendo nel sito, che dalle precedenti a poco a poco accelerate lascierebbersi voto, sicchè non segua discontinuazione nel corpo, od interruzione nel corso: altrimenti in un lungo tratto di cammino, tanto potrebbonsi moltiplicare le resistenze del fondo, e delle sponde contro una data massa corrente, che ne distruggerebbero in fine ogni sensibile movimento nelle parti più remote dallo sbocco, se questo non venisse dalla natura stessa conservato nel modo ora accennato.

Qui è dove in pratica trovasi mancante la teoria del Guilielmini, che alle acque correnti per codesta sorta di canali assegna una celerità media competente ai quattro noni dell'altezza viva, mentre nelle sperienze essa riesce molto minore, e tanto minore, quanto è più lungo il cammino dell'acqua per giugnere allo sbocco. Al proposito de' canali orizzontali di varia lunghezza potrebbesi forse determinare qualche cosa di analogo a ciò, che dei tubi orizzontali di

varia lunghezza si è stabilito nelle sperienze del cap. 1. n. 2.; ma per assicurarsene, ci vorrebbero sperienze fatte con un medesimo corpo di acqua corrente per canali d'uniforme ampiezza, ma di notabilmente diversa lunghezza.

In secondo luogo consideriamo il movimento delle acque correnti per canali di fondo inclinato. In questi la pressione verticale risolvesi pure in due, delle quali una è come il seno, e l'altra come il coseno dell'angolo d'inclinazione, fatto dal fondo colla orizzontale: con quella discendono i solidi, e con questa premono orizzontalmente il piano, su cui insistono; ma nei fluidi rimane a vedersi, se oltre a questa, alla loro discesa concorra altresì la pressione laterale.

Facciamoci pertanto ad esaminare codette due pressioni, cioè quella parte della verticale, che è come il seno dell'inclinazione, e la laterale. Sul bel principio del movimento le due pressioni hanno comune la direzione lungo al canale, e comune il primo istante della loro azione. Se queste due pressioni da principio sollecitano congiunte le acque al movimento, dovranno pure congiunte continuare a sollecitarla negl'istanti susseguenti; quindi questo dovrà accelerarsi maggiormente, che se venisse sollecitato da una sola di esse. Al che in primo luogo contraddicono tutte le sperienze fatte con luci affatto libere, aiutate eziandio con tubi, ed imbuti, e le fatte con sezioni affatto sgombre d'impedimento prese nell'acqua corrente per canali di fondo inclinato, nelle quali sperienze appena appena trovasi la celerità competente alla intera pressione, od alla libera discesa, ben lontana dal trovarsi maggiore, e con ragione: imperciocchè, se le diverse pressioni, o gravitazioni si considerino, quali realmente sono per se stesse, cioè come pesi: ogni peso accelerando nella discesa il suo corpo con una legge comune a tutti, o sia che i diversi corpi caggiano solitari, e separati, o pure congiunti, e composti in un solo. Dunque o si considerino congiunte, o separate le suddette due pressioni, o pesi, non potranno accelerare altramente il corpo loro comune, cioè l'acqua stessa. Dunque alterare non dovras

la comune legge di acceleramento, e perciò non potrà farsi questo maggiore dalle due pressioni unite di ciò farebbersi da ciascuna separatamente, che se ciò è, come parmi evidente, sul principio del movimento, lo farà necessariamente, e per le stesse ragioni nella continuazione del medesimo. Dunque ne' canali di fondo inclinato la celerità dell'acqua potrà, e dovrà tutta attribuirsi alla sola, e semplice discesa, come col Guglielmini insegnano altri gravissimi scrittori, e la dimostrano concordemente le sperienze.

La verità medesima può dimostrarsi anche più brevemente in altra maniera, cioè: tanto la pressione verticale, quanto la laterale ne' fluidi altro non essendo, che un conato alla discesa, con cui ogni grave tende al comun centro per la via, che gli viene concessa, ma nei canali inclinati, nè ai fluidi, siccome nei piani inclinati neppure ai solidi, non è concessa altra via per avvicinarsi ad esso centro; dunque codesti conati o congiunti, o separati che si vogliano, tenderanno colla stessa legge di acceleramento a portare al basso quell'acqua, da cui sono prodotti.

A tutto ciò potrebbe replicare, che niun inconveniente ne seguirebbe, quando ad una pressione fatta in qualche modo maggiore di un'altra, corrispondesse ancora un maggior acceleramento, che anzi questo è ciò, che dimostrano le sperienze fatte con luci aperte sotto diverse altezze, o pressioni.

A questa replica rispondevi niun inconveniente, anzi essere cosa necessaria, e dalle sperienze comprovata, che a maggiore pressione corrisponda acceleramento maggiore, ma questo nulla prova in favore della combattuta opinione, e contro la nostra asserzione, perchè intanto a maggior pressione corrisponde maggior acceleramento, perchè alla pressione maggiore sempre corrisponde maggior altezza di fluido, o dicasi maggior discesa, il che non ha luogo, nell'acqua corrente per canali inclinati, poichè tutti i punti di qualsivoglia sezione presa in un canale inclinato, non hanno maggiore discesa dall'origine del moto di quella, che abbiano

i punti infimi della medesima, che anzi l'hanno minore; e però la minore discesa di quelli nulla può aggiugnere alla celerità prodotta dalla discesa maggiore di questi. Dopo che aggiugnasi, che tra le infinite direzioni, che avere possono i gravi cadenti, la verticale prevale sempre ad ogni altra, perchè è la più libera, e naturale.

C A P O I V.

*Sperienze, e riflessioni sopra l'uso del tubo ricurvo
del Signor Pirot.*

27 **E**ssendo per comune consenso degl'idrometri di un gran vantaggio lo assicurare, e facilitare l'uso di codesto strumento. Perciò nel primo volume già cominciammo a dirne alcuna cosa; ma rimanendo ancora qualche dubbio circa la forma più vantaggiosa, e qualche difficoltà circa l'uso del medesimo, e volendo pur anche trarne qualche lume ad altro intento: quindi è, che nell'anno 1768. sonosi preparati due tubi del diametro di linee 28., l'uno con imbuto uniforme, al cui orifizio però può applicarsi una laminetta, in cui è intagliata un'apertura circolare col diametro di linee 7., acciò l'area di quest'apertura fosse la decimasesta parte di quella del tubo, onde in tale ragione si diminuissero i bilanciamenti dell'acqua nello strumento. All'altro adattossi un imbuto cicloidale, della forma altrove osservata più vantaggiosa per accrescere le dispenze dei getti.

Al primo settembre calossi la cateratta del nostro regolatore in modo, che vi rimanesse sotto una luce alta pollici quattro, l'acqua rattenuta alzossi pollici 22., linee 7. dal fondo, applicando ad essa luce il tubo ordinario, che ha un diametro di circa sei linee, cosicchè toccasse il fondo, e poi sollevandolo successivamente, la sommità dell'acqua in esso sempre trovossi di livello colla stagnante dietro la cateratta. Adattossi dopo il tubo del diametro di 28. linee
nella

nella stessa maniera, ed in esso pure l'acqua alzossi al livello medesimo. Lo stesso succedette chiudendo l'orifizio dell'imbuto col suo coperchietto, che ha nel mezzo un foro di linee 7., ed in questo pure, sebbene più lentamente, si fece l'alzamento medesimo. Finalmente applicando ancora nella stessa maniera l'altro tubo maggiore coll'imbuto cicloidale, in esso pure seguì l'alzamento dell'acqua al livello della stagnante; e comechè questo livello era stabile, così stabile in tutti i tubi fu l'alzamento dell'acqua.

Sperimentaronsi poscia i tubi medesimi nell'acqua liberamente corrente, e tutti nel medesimo sito, e circostanze, e per quanto ne permisero di osservare i bilanciamenti dell'acqua, non scoprisi sensibile divario negli alzamenti.

Rinnovaronsi codeste sperienze li 10. ottobre, presenti li tre soprammentovati Signori Professori Conte Stratico, Dottore Candido Pistoi, e Dottore Somis, ed un'altra volta ancora alli 17. di settembre 1769. con ognuno de' suddetti tubi di grandezza, ed imbuto diverso. In quale occasione l'applicazione dei tubi fecesi da ambe le parti della cateratta, avendosi la totale altezza dell'acqua ritenuta di pollici 27., e l'altezza sotto la cateratta di pollici 4., e nell'acqua liberamente corrente, senza che da veruno potesse scoprirsi divario sensibile nelle altezze dell'acqua nei diversi tubi.

Concordano queste sperienze colle riferite al n. 108. del vol. 1., siccome ancora le seguenti dimostrano vero ciò, che nel citato luogo si disse degli uguali alzamenti nel tubo immerso a diverse profondità in una medesima verticale, dove però libero sia il corso, nè turbato da accidenti, o variato da circostanze, fuorchè viciuo al fondo, ed alle sponde, dove sogliono essere minori, e talora ancora verso la superficie.

S P E R I E N Z A P R I M A.

28 A' 19. ottobre l'altezza della corrente alla seconda scala
essendo di pollici 10. 5. poll. 10. 5.

N

Nel tubo ivi immerso fino al fondo si fece l'altezza totale dell'acqua di pollici . . .

$$11. 3. = 11. 8.$$

Alzato tre pollici dal fondo, l'altezza di pollici . . .

$$8. 9., + 3. = 11. 9.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$6. 0., + 6. = 12. 0.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$3. 0., + 9. = 12. 0.$$

2.^a

A' 20. detto essendo l'altezza della corrente alla seconda scala di pollici . . .

$$12. 8.$$

Nel tubo immerso fino al fondo, si fece la totale di pollici 13. 9. = 13. 9.

Alzato tre pollici . . .

$$11. 6., + 3. = 14. 6.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$8. 9., + 6. = 14. 9.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$5. 6., + 9. = 14. 6.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$2. 6., + 12. = 14. 6.$$

3.^a

A' 20. detto l'altezza alla seconda scala essendo di pollici . . .

$$12. 11.$$

Nel tubo immerso fino al fondo, si fece la totale altezza di poll. 13. 9. = 13. 9.

Alzato quattro pollici . . .

$$10. 9., + 4. = 14. 9.$$

Alzato altri quattro pollici . . .

$$7. 0., + 8. = 15. 0.$$

Alzato altri quattro pollici . . .

$$3. 0., + 12. = 14. 6.$$

4.^a

A' 25. detto l'altezza alla seconda scala essendo di pollici . . .

$$13.$$

Nel tubo immerso fino al fondo, si fece la totale altezza di poll. 13. 9. = 13. 9.

Alzato tre pollici . . .

$$11. 6., + 3. = 14. 6.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$9. 0., + 6. = 15. 0.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$6. 0., + 9. = 15. 0.$$

Alzato altri tre pollici . . .

$$2. 6., + 12. = 14. 6.$$

5.^a

A' 25. detto essendo l' altezza alla
seconda scala di pollici . 10. 6.

Nel tubo toccante il fondo la to-
tale altezza dell' acqua fu di pollici 11. 4. = 11. 4.
Alzato due pollici . 9. 6., + 2. = 12. 6.
Alzato altri due pollici . 7. 9., + 4. = 11. 9.
Alzato altri due pollici . 5. 9., + 6. = 11. 9.
Alzato altri due pollici . 3. 9., + 8. = 11. 9.

6.^a

A' 18. ottobre l'altezza alla sud-
detta scala essendo di pollici 7. 9.

Nel tubo immerso fino al fon-
do si fece l'altezza totale di pollici 8. 0. = 8. 0.
Alzato un pollice . 7. 9., + 1. = 8. 9.
Alzato un altro pollice . 6. 9., + 2. = 8. 9.
Alzato un altro pollice . 5. 10., + 3. = 8. 10.
Alzato un altro pollice . 4. 10., + 4. = 8. 10.
Alzato un altro pollice . 3. 10., + 5. = 8. 10.

- 29 Molte altre sperienze di questa sorta sonosi fatte, nelle quali tutte l' alzamento menomo corrisponde al fondo, quello verso la superficie di poco differisce da quello verso il mezzo, e questi verso il mezzo sono sensibilmente uguali, benchè a profondità diverse, il che fu già osservato nel vol. 1. al n. 108.; dove le immersioni facendosi nel canale de' mulini si ebbero profondità maggiori di queste con pari successo. Onde parmi bastantemente provata l'uguaglianza degli alzamenti dell' acqua nel tubo Pitot, immerso a diverse profondità nella verticale medesima di una sezione, per cui liberamente l'acqua fluisce, e quindi codesto strumento fare in tali circostanze le veci di un regolatore, e con la stessa maniera, che pel regolatore, potersi determinare le quantità fluenti. Con tutto ciò, se così operisi ovunque, so-

N 2

venti la misura non riuscirà giusta, ed ancorchè le portate ritrovate riducansi alla nota ragione della vena contratta, come dal 18. all' 11., esse troveransi maggiori delle vere, poichè cotal procedimento suppone la sezione affatto libera, cioè passare per essa l'acqua coll' intera velocità dovuta alla pressione, od alla discesa, del che non sempre possiamo certificarci colla semplice oculare osservazione. Infatti, se in tal maniera si calcolino le sperienze fatte col tubo situato alla seconda scala, troveranno eccedenti le portate.

Così nella sperienza dei 19. ottobre, in cui l'altezza della corrente alla seconda scala era di pollici 10. 5., e l'altezza media totale nel tubo di pollici 11. 9.; onde l'alzamento dell'acqua nel tubo sopra la superficie esteriore era di pollici 1. 4., fatto il computo come nel regolatore, trovasi la portata, anche ridotta, di piedi 5. 9. 11. in vece della vera 4. 2. 9.

Così pure nella sperienza de' 20. ottobre, in cui l'altezza della corrente alla seconda scala era di pollici 12. 8., l'altezza media totale nel tubo di pollici 14. 5., e quindi l'alzamento sopra la superficie esterna di pollici 1. lin. 9. fatto come sopra il computo, trovasi la portata ridotta di piedi 7. 11. 5. in vece di 5. 10. 9.

Pigliasi ancora la sperienza delli 25. ottobre, in cui l'altezza alla seconda scala era di pollici 13. dalle cinque immersioni del tubo ivi fatte, ne risulta una totale media altezza di pollici 14. 6. 7., onde l'alzamento sopra la superficie esteriore sia di pollici 1. 6. 7., fatto anche ivi il computo come pel regolatore, trovasi la portata ridotta di 7. 11. 6. in vece di 6. 0. 9.

Un somigliante eccesso troverebbesi calcolando nella stessa maniera le altre sperienze fatte col tubo nel medesimo luogo; e quindi ancora in altri luoghi, ove concorressero le medesime circostanze: ma da tutto ciò non può generalmente inferirsi, che la sommità dell'alzamento dell'acqua nel tubo non sia il vertice della parabola, che è la scala della velocità; e quindi nèppure dirsi generalmente erroneo il me-
to-

do, che ad un tale supposto si appoggia; ma piuttosto dee farsi qualche riflessione sopra le circostanze per accertarsi della verità del supposto. A proposito del che sul fine del dicembre del 1768. ricevetti lettera, seguita poi d'alcune altre dal Signor Teodoro Bonati illustre scrittore di bellissime sperienze registrate nel sesto tomo della raccolta di Parma, in cui schiettamente mi accenna la difficoltà di persuadersi, che la fommità dell'alzamento dell'acqua nel tubo Pitot possa considerarsi qual vertice della parabola, che scala sia delle velocità in una corrente, che anzi propende a credere, che gli uguali alzamenti dell'acqua in detto tubo indichino uguaglianza di celerità nei punti diversi di una medesima perpendicolare. La qual cosa dimostrasi anche vera nei canali sensibilmente inclinati, e tale ancora sembrano dimostrarla le sperienze del passato autunno 1768.

Codeste due ipotesi paiono distruggerfi l'una l'altra, e quindi, che le velocità di una corrente a maggiori profondità non debbano farsi maggiori. La difficoltà adunque consiste nello scoprire quale delle due sia la vera, o se pure lo sieno ambedue, consisterà nel distinguerne i casi, e le circostanze.

Questa difficoltà è forse delle maggiori in questa materia, nè forse riuscirammi di scoglierla affatto: con tutto ciò veniamo all'esame, e riescane quello che si voglia, purchè con vantaggio della verità, e della scienza.

Le sperienze riferite nel primo volume, e le replicate dopo con tubi di forma, e grandezza diversa, applicati all'apertura lasciata sotto la cateratta del regolatore, nei quali sali l'acqua costantemente al livello della stagnante contro la cateratta, dimostrano, che la pressione è la forza, che produce la celerità dell'acqua, che ne sgorga (lo stesso dicasi della discesa, poichè pressione, o discesa libera da pari altezza, producono celerità uguali); ma le celerità dalla pressione, o dalla libera discesa prodotte sono come le ordinate di una parabola, il cui vertice è nella superficie orizzontale dell'acqua stagnante contro la cateratta, o nel prin-

cipio della discesa, siccome dimostrasi in teorica, e si conferma colle sperienze. Dunque la parabola medesima, che vale nell'uso del regolatore, in parrà di circostanze valer deve, e nello stesso modo, nell'uso del tubo Pitot: così uguali portate sonosi trovate col regolatore, e col tubo, come apparisce dalle sperienze del primo volume, e da altre nuove, che dopo sonosi fatte, e che esporremo in appresso. La cosa dunque è certa nelle acque, che escono da fori de' vasi, oppure da sotto la cateratta di un regolatore; ma nelle acque correnti ella non lo è per ugual maniera, e richiedesi particolare attenzione alle circostanze.

Se l'alveo, per cui decorre l'acqua, sarà sensibilmente inclinato, facilmente si concepisce, e si dimostra ancora, che, prescindendo dalle resistenze, le parti tutte della corrente possono muoversi con una comune celerità: poichè dopo qualche tratto di cammino, può farsi tanta la discesa, che prevalga alla semplice pressione. Lo stesso può succedere negli alvei orizzontali di fondo, per quali però scorra l'acqua con qualche regolare acceleramento da qualche vicina chiamata prodotto, e quindi con inclinazione della sua superficie. Passiamo ora a riflettere sopra le sperienze.

In quella degli undici di ottobre, in cui le altezze alle quattro scale erano di pollici 8. 4., 7. 10., 7. 5., 6. 3., e dove la portata effettiva trovossi di piedi cubici 2. 9. 3. per minuto secondo, si fecero all'ultima scala cinque immersioni nel mezzo, che diedero l'altezza media totale dell'acqua nel tubo di pollici otto, e se ne fecero altrettante alla sponda, che diedero l'altezza media totale di pollici 7. 4., onde la media tra di queste due sia di pollici 7. 8., da cui sottraendo l'altezza della corrente pollici 6. 3., ne rimane l'alzamento medio sopra la superficie corrente di pollici 1. 5., cui compete una celerità di piedi 2. 7. 11. per minuto secondo, per quale celerità moltiplicando l'area della sezione, cioè piedi quadrati 1. 0. 6., trovasi la portata effettiva di piedi cubici 2. 9. 2. 11. 6.

2.^a

A' 18. ottobre le altezze della corrente alle quattro scale essendo di pollici 8. 2., 7. 9., 7. 2., 5. 10. trovossi la portata effettiva di piedi cubici 2. 7. 3. essendosi fatte sei immersioni del tubo alla seconda scala tanto nel mezzo, che nella sponda del canale, trovossi l'altezza media totale di pollici 8. 7., da cui sottraendo l'altezza viva 7. 9. rimane l'alzamento medio di linee 10., le quali danno una celerità di piedi 2. 0. 5., che moltiplicati per l'area della sezione di piedi quadrati 1. 3. 6. danno la portata di piedi 2. 7. 6.

3.^a

A' 19. ottobre le altezze alle quattro scale essendo di pollici 10. 9., 10. 5., 9. 8., 8. 0. trovossi la portata effettiva di piedi cubici 4. 2. 9. per minuto secondo.

Si fecero solamente nel mezzo quattro immersioni del tubo alla seconda scala, dalle quali ne risultò l'altezza totale media di pollici 11. 7. circa, e quindi l'alzamento medio sopra la superficie corrente di pollici 1. 2., che dà una celerità di piedi 2. 4. 11., la quale moltiplicata per l'area della sezione di piedi quadrati 1. 8. 10. dà la portata di piedi 4. 4. 2.

4.^a

A' 20. ottobre avendosi alle scale le altezze 13. 0., 12. 8., 11. 8., e 10. 0. trovossi la portata effettiva di piedi cubici 5. 10. 9. per minuto secondo.

L'altezza media totale, risultante da cinque immersioni del tubo alla seconda scala tanto nel mezzo, che alla sponda, trovatisi di polli. 14. 3., da cui sottraendo l'altezza 12. 8., rimane l'alzamento medio sopra la superficie corrente di pollici 1. 7., che importa la celerità di piedi 2. 9. 9., i quali moltiplicati per l'area della sezione di piedi quadrati 2. 1. 4. danno la portata di piedi 5. 11. 3.

5.^a

A' 20. detto essendo le altezze di pollici 13. 4., 12. 11., 11. 10., 10. 3. trovossi la portata effettiva di piedi 6. 0. 9.

Calcolandosi coll' alzamento medio datoci dalle quattro immersioni del tubo, fatte solamente nel mezzo, cioè coll' alzamento di pollici 1. 7. 0., trovansi piedi cub. 6. 0. 3. 9.
6.^a

A' 10. detto essendo le altezze pollici 11. 3., 10. 10., 10. 0., 8. 5. trovossi la portata effettiva di piedi cub. 4. 6. 8.

Calcolando la medesima col tubo, mediani quattro immersioni del medesimo fatte solamente nel mezzo, le quali danno un alzamento medio di pollici 1. 4. 6., trovafi la portata di piedi cubici 4. 8. 8.

7.^a

A' 20. detto essendo le altezze di pollici 11. 5., 11. 0., 10. 3., 8. 6. trovossi la portata effettiva di piedi cub. 4. 9. 2. 9., la quale calcolata coll' alzamento medio di pollici 1. 6. trovato con quattro immersioni del tubo fatte solamente nel mezzo della corrente, ed alla seconda scala, trovafi di piedi 5. 0. 0.

8.^a

A' 25. ottobre le altezze essendo di pollici 13. 4., 13. 0., 11. 11., 10. 3., quasi le medesime, che nella quinta di queste sperienze, in cui la portata effettiva trovossi di piedi cubici 6. 0. 9.; facendosi il computo coll' alzamento medio di pollici 1. 6. 7., datoci dalle cinque immersioni del tubo alla seconda scala, e nel mezzo della corrente, trovansi piedi 6. 0. 3.

9.^a

A' 25. detto le altezze essendo di pollici 11. 0., 10. 6., 9. 9., 8. 0., e però medie tra le altezze della terza, e della sesta di queste sperienze; nella terza la portata effettiva trovossi di piedi cubici 4. 2. 9., e nella sesta di 4. 6. 8. essendo fatte alla seconda scala cinque immersioni nel mezzo, che diedero l'altezza totale media di pollici 11. 7.; quindi la media tra queste due di pollici 11. 9. 6., da cui sottraendo l'altezza della corrente 10. 6., rimane l'alzamento medio di pollici 1. 3. 6., con cui fatto il computo trovafi la portata di piedi 4. 5. 4., la quale è pur anche media tra 4. 2. 9., e 4. 6. 8.

Nel

10.^a

Nel medesimo giorno stando ferme le suddette altezze, gettosì la corrente nella torre. In quale occasione si misurò una sezione nell'introduttore, dove si trovò l'altezza libera della corrente di pollici 7. 10. si fecero nel mezzo della corrente quattro immersioni del tubo, distanti da due in due pollici, le quali diedero l'altezza totale media di poll. 10., da cui sottraendo l'altezza della corrente di pollici 7. 10., rimane l'alzamento medio nel tubo di pollici 2. 2. 0., con cui calcolata la sezione trovasi la portata di piedi 4. 3. 8. Avendosi le medesime altezze li 26. ottobre, misurosì la portata col regolatore, ove l'apertura lasciata sotto la cateratta era di cinque pollici, l'altezza totale dell'acqua rattenuta di pollici 17. 3., e quindi il battente di pollici 12. 3.; fatto il computo trovasi piedi cubici 7. 1. 8. 6. 8., che ridotti alla ragione del 18. all' 11. danno la portata effettiva di piedi 4. 4. 4. 6. Calcolando la medesima colle due scale inferiori, pigliando in luogo dell'altezza 9. 9. 0., la media tra essa, e la precedente 10. 6. 0., cioè pollici. 10. 1. 6., trovasi pure la portata ridotta di piedi 4. 3. 8., dove concordano i due metodi del tubo, quello del regolatore, e quello delle due sezioni con la misura attuale.

O S S E R V A Z I O N I.

1.^a

31 **D**A tutte le precedenti sperienze ne risulta, che l'acqua rasente un fondo regolare come questo ha bensì un movimento notabilmente minore, che nei fitti dal fondo più lontani; ma però ancora considerabile, perchè sempre l'acqua ivi solleva nel tubo una colonna più alta della corrente.

2.^a

Che l'alzamento nel tubo sopra la superficie esterna, ne indica la pressione, o la discesa dell'acqua alto imbuto del medesimo, e però quanto è da se, la celerità, che in tal sito le competerebbe, che se tale infatti ella non trovasi,

O

ciò succede, perchè l'effetto della pressione, o della discesa viene in parte, o in tutto impedito dalle resistenze, e principalmente del corpo di acqua, che dee spingere innanzi a se.

3.^a

Che facendosi più immersioni del tubo nelle diverse parti di una sezione, può trovarsi la pressione, e discesa, che produce la celerità media per la sezione intera, con cui facendosi il computo, in fine non abbiasi bisogno di riduzione alcuna. Il che rende molto più sicuro, generale, e facile l'uso di esso strumento, e se le immersioni faccianfi solamente nel mezzo, il prodotto sarà per lo più alquanto maggiore del giusto.

4.^a

- 32 Dirassi; ma in fine la sommità dell'alzamento dell'acqua nel tubo, non ci dà sempre il vertice della parabola, e le celerità a diverse profondità non sono sempre come le ordinate ad essa parabola: del che ne sono una prova queste stesse sperienze. La risposta a questa istanza già trovasi poco sopra nella seconda di queste osservazioni, cioè, che l'alzamento dell'acqua nel tubo esprime sempre, e generalmente altrettanta pressione, o discesa, ed ogni pressione, o discesa non impedita genera sempre una celerità, che ne è come la sua radice quadrata, e quando ciò non segue, egli è un segno certissimo, che l'azione della pressione, o della discesa viene o tutta, o in parte impedita dall'acqua, che precede. Questo impedimento non trovasi nelle acque, che sgorgano liberamente dalle luci aperte nei vasi, o da sotto la cateratta di un regolatore, o che con uniforme acceleramento scorrono per un canale. Questa verità viene comprovata dalla concordia delle sperienze fatte col tubo Pitoi, col regolatore, col metodo delle due sezioni, e colle misure attuali riferite nel primo volume, ed ancora dalle seguenti fatte nell'autunno del 1768.

Così nella sperienza degli 11. ottobre, in cui il tubo fu applicato alla quarta scala, dove l'altezza della corrente era

di pollici 6. 3., l'altezza media totale nel tubo trovossi di pollici 7. 8., da cui sottraendo 6. 3., rimane un alzamento di poll. 1. 5.; facciasi il computo con questo battente, come pel regolatore, e troverassi la portata ridotta di piedi 2. 11. 6., l'attuale essendosi trovata di 2. 9. 3.

Così pure nella speriienza decima, fatta nell' introduttore, ove l'altezza media totale trovossi di pollici 10., e quella della corrente libera di pollici 7. 10., onde fecesi un battente di pollici 2. 2., fatto anche ivi il computo come pel regolatore, trovafi la portata 7. 0. 9., che ridotta alla ragione del 18. all' 11. fassi 4. 3. 9. La stessa calcolata col tubo nell'altra maniera, trovossi di piedi 4. 3. 8., e col regolatore di 4. 4. 6., e colle due scale inferiori, trovossi pure di 4. 3. 8.

Nella speriienza delli 17. Ottobre del 1769. fatta per assicurarci della vena del grande imbuto circolare, aveansi alle quattro scale le altezze di pollici 13. 3., 12. 8., 11. 10., 10. 2., e col tubo si notò all'ultima scala un'altezza mezzana totale di pollici 12. 3. Il computo fatto colle due ultime altezze dà la portata non ridotta di piedi cub. 9. 8. 0., e fatto col tubo, siccome praticasi pel regolatore, trovafi la portata non ridotta di piedi cubici 9. 10. 4.

Ed in quella delli 18. ottobre le quattro altezze essendo di pollici 13. 6., 13. 0., 12. 2., 10. 4., fatto il computo colle due ultime, trovafi la portata ridotta di piedi cubici 6. 0. 10., da cui sottraendo la dispensa effettiva dell'imbuto di piedi 3. 7. 8., rimangono piedi 2. 5. 2. decorrenti ancora pel conduttore. Mentre sgorgava l'acqua per l'imbuto, applicossi all'ultima scala il tubo, in cui fece un'altezza media di pollici 7. 3., scorrendo ivi coll'altezza di poll. 5. 9. Calcolata con queste misure, la portata, come pel regolatore trovafi la effettiva di piedi cubici 2. 8.

Vero è, che queste due speriienze, perchè fatte assai in fretta, non sono molto esatte: bastano però per dare a vedere, che nelle sezioni libere può adoperarsi il tubo ricurvo, nella stessa maniera, che il regolatore; e conseguentemente:

la sommità dell'alzamento dell'acqua nel tubo trovarsi nel vertice della parabola, che è la scala delle velocità naturali. E dal fin qui detto si comprende pure donde proceda la concordia, anzi l'identità dei diversi metodi in parità dei supposti, e la necessaria loro differenza nella disparità dei medesimi. Di modo che pare, che da queste cose potrebbesi conchiudere l'argomento in questa guisa: l'altezza dell'acqua nel tubo ricurvo in essa immerso, essendo sempre l'effetto della pressione, o di una uguale libera discesa, se cotale pressione, o libera discesa non incontrerà verun ostacolo, produrrà sempre una celerità, che sarà come la radice quadrata di essa pressione, o discesa; e perciò in questi casi la sommità dell'acqua nel tubo ricurvo sarà appunto il vertice di una parabola, le ordinate alla quale faranno come le celerità corrispondenti a ciascun punto delle immersioni fatte nella medesima perpendicolare. Il che vedesi confermato con più esperienze.

Ma se la pressione, o la discesa, per cagione di resistenze, produrre non possa la competente sua celerità, con tutto ciò, perchè ne' fluidi conservasi tutta intera la potenza, tolto l'ostacolo, immantinente ne segue l'effetto, cioè il conveniente movimento; il che ad evidenza può ancora dimostrarsi così: nell'acqua stagnante in un vaso non fassi moto alcuno attuale; ma se, vi s'immerga un tubo diritto, o ricurvo col suo orifizio otturato sotto a qualunque profondità, appena verrà aperto l'orifizio, che tosto salirà l'acqua nel tubo al livello della esteriore, perchè allo aprirsi dell'orifizio togliesi ivi per un tempo la resistenza alla pressione, onde ne segue il movimento; ma poi perseverando da una parte la pressione della esteriore, e con essa equilibrandosi la pressione della interiore nel tubo, mantienfi l'acqua in esso tubo senz'altro movimento ad uguale altezza.

Lo stesso segue, se in un'acqua corrente s'immerga il tubo ricurvo col suo imbuto rivolto, giusta la direzione della medesima, perchè in questo caso la sola pressione fa salire l'acqua nel tubo; ma rivolgendo l'imbuto contro alla cor-

rente, l'acqua nel tubo sale a maggiore altezza che la esteriore, perchè alla semplice pressione vi si aggiugne una forza prodotta dal movimento della corrente medesima. Ora l'altezza dell'acqua nel tubo ricurvo può conservarsi la stessa tanto da una pressione costante all'orifizio del tubo, siccome accade nell'acqua stagnante, quanto da una pressione successiva, ma sempre uguale, siccome nell'acqua liberamente corrente; ma nella stagnante non s'innalza l'acqua nel tubo ricurvo sopra il livello dell'esteriore, dunque il maggiore alzamento è un effetto necessario del moto progressivo dell'acqua, di modo che tolto l'uno togliesi l'altro, ed accrescendosi, o diminuendosi l'uno, si accresce, o si diminuisce parimente l'altro: quindi ne segue, che da esso maggior alzamento debbasi argomentare della celerità del corso. Cotale celerità ella è intera nelle acque uscenti da fori de' vasi, e nei canali sensibilmente inclinati; non così ne' sensibilmente orizzontali, o di pochissima declività, dove le resistenze del fondo, e delle sponde, prescindendo ancora da altro, successivamente vanno distruggendo qualche porzione della celerità nella precedente, e questa ritardandosi, ritarda altresì la susseguente, e l'obbliga a sollevarsi di pelo per poter proseguire il suo corso, con che la di lei pressione laterale viene impedita di modo, a non poter produrre la conveniente celerità. Perciò in questi casi, egli è sempre cosa più sicura il fare più immersioni del tubo tanto nel mezzo, che verso le sponde, affine di ricavarne l'alzamento medio sopra la superficie corrente, e colla celerità a tale alzamento competente, calcolarne la portata, la quale poi non abbisognerà di riduzione, siccome esige l'altra regola, che è comune al regolatore, perchè in essa fassi il computo colla celerità media tra le massime, non già colla media tra tutte.

- 33 E poichè dalla celerità del corso dipende non solamente la quantità, ma la forza ancora di una corrente, e cotale forza dimostrandosi nei fluidi proporzionale al quadrato delle celerità, e però proporzionale alla pressione, o discesa capace a produrla; dunque avendosi maniera di accertarsi della

celerità, avrassi pure quella di determinarne la forza. Affine di assicurarsi di questa legge delle forze nell'acqua corrente, sonosi fatte, e fannosi tuttora da diverse Accademie varie sperienze; ma perchè non si finì mai di dubitare, e di altercare sopra le leggi delle celerità; così non si finì ancora di dubitare, e di altercare sopra quelle delle forze. A questo proposito sonosi fatte da noi ancora alcune sperienze, che altrove sporremo; ma intanto parmi, che vagliano per tutte, quelle fatte col tubo ricurvo, di forma, e grandezza diversa, e in diversi luoghi applicato, nelle quali l'altezza totale dell'acqua nel tubo sempre uguagliò quella della stagnante dietro la caieratta, e nelle acque correnti, uguali pure trovaronsi gli alzamenti sopra la superficie esteriore nei differenti tubi nello stesso luogo collocati: dunque nelle correnti affatto libere le forze faranno come le altezze intere dell'acqua nel tubo ricurvo, e nelle impedito faranno come i maggiori alzamenti sopra la superficie esteriore, cioè in ogni caso le forze faranno come i quadrati delle celerità.

Nuova forma del tubo ricurvo, e suo uso.

- 34 Tutte le soprariferite sperienze sono state fatte coi tubi di vetro a loro luogo descritti; ma considerando, che la fragilità della materia richiede, che vengano incassati in altra più soda, e con ciò diventando più malagevole ad adoperarsi la macchinetta, ed a tenersi immobile nelle correnti a notabile profondità; si pensò ad altra forma, che tutto insieme ne rendesse l'uso più comodo, e sicuro, qual è il seguente. Al tubo di vetro se ne sostituìse uno di latia diviso in due, o in più pezzi, che possono fra di loro unirsi a vite, affine di potersene valere a qualunque profondità; il suo diametro è di un'uncia o più, l'imbuto d'ottone di ugual diametro congiunto a vite col tubo. Per diminuire i bilanciamenti dell'acqua nel tubo l'orizzio dell'imbuto può chiudersi in parte con un coperchietto, in mezzo al quale

si lascia un'apertura di un quarto di oncia, come già praticossi nei tubi di vetro di gran diametro.

Ogni pezzo del tubo di laua ha un anello fornito di piccola vite, e quello congiunto all'imbuto ne ha due, e tutti sono di figura rettangolare, per potervi inferire un'asta di ferro divisa in piedi, once, e punti, la di cui punta ingegesi nel fondo del canale, a fine di tenere il tubo immobile a qualunque profondità, fermandolo contro l'asta mediante le viti di ciascun anello.

Nel tubo s'introduce una verga ben diritta, e leggiere, divisa anch'essa in piedi, once, e punti; la stremità inferiore è unita ad un globetto voto, o ad un pezzo di suvero, che galleggiando la sostiene fuori dell'acqua. Notasi poi diligentemente quanta parte se ne immergea nell'acqua cheta. La stremità superiore passa per un occhio, od anello unito all'orifizio superiore del tubo, dal quale viene trattenuta nel mezzo, e perpendicolare. Deesi pure notare quanta parte della bacchetta si trovi dal detto occhio sino a toccare il fondo interiore dell'imbuto; e se, a cagione della curvità, o spessore di esso imbuto, siavi notevole distanza tra il fondo interiore del medesimo, ed il piano orizzontale, sul quale verticalmente si colloca il tubo, noterassi pure tale distanza. Poste queste cose l'uso dello strumento riesce assai comodo, e facile: poichè per trovare il maggiore alzamento dell'acqua sopra la superficie esterna, cagionato dalla celerità, basterà prendere la differenza delle altezze sopra la bacchetta, quando l'imbuto è rivolto alla corrente, e quando è rivolto contro essa, cioè nelle due opposte direzioni dello stesso imbuto, alla medesima profondità immerso. Per esempio: se rivolto l'imbuto a seconda della corrente la bacchetta sollevasi sopra l'occhio del tubo once 16. 4.; ma rivolto contro alla corrente l'imbuto, la bacchetta s'innalzi sopra lo stesso occhio once 18.; la differenza tra once 18., ed once 16. 4., cioè once 1. 8., farà l'alzamento ricercato. E quindi la celerità nel sito della immersione farà di piedi Torinesi 2. 3. 7. per minuto secondo.

Riuscendo talora malagevole il misurare colla dovuta esattezza le altezze vive di una corrente veloce, ciò otterrassi facilmente con questo tubo. . Perchè essendo nota l'altezza del tubo dal suo orifizio superiore fino a toccare il fondo del canale; e per altra parte potendosi comodamente osservare l'alzamento della bacchetta dal fondo dell'imbuto fino sopra all'occhio del tubo, quando esso imbuto sia rivolto a seconda della corrente, in quale situazione l'acqua nel tubo è a guisa di stagnante; se all'alzamento della bacchetta si aggiungerà la quantità della sua immersione, che ci deve esser nota per previa esperienza fatta nell'acqua cheta, e ancora vi si aggiunga la distanza tra il fondo interiore dell'imbuto, ed il sottoposto piano orizzontale, quale distanza pure dee essersi osservata: la somma di tutte queste sarà l'altezza viva della corrente.

Per esempio, l'altezza dall'occhio del tubo fino al fondo del canale sia di once 24. 6., e la bacchetta da detto occhio fino a toccare il fondo interiore dell'imbuto sia solamente di once 24., talmente che tra esso fondo interiore dell'imbuto, e 'l fondo del canale sianvi punti 6. La nota immersione della bacchetta nell'acqua stagnante sia di punti 11. Ora, se immerso il tubo fino a toccare il fondo del canale col suo imbuto rivolto a seconda della corrente, la bacchetta s'innalzi sopra l'occhio del tubo per 16. 4., a queste aggiungansi li punti 6., e li punti 11. suddetti, cioè once 1. 5., di avrà l'altezza viva ricercata della corrente di once 17. 9. Avendo pure fatte molte osservazioni con questo tubo, e con gli altri di vetro immersi nello stesso luogo della corrente, e della luce sotto la cateratta del regolatore, sonosi sempre trovati esattamente fra loro uguali gli alzamenti dell'acqua in ciascuno di essi tubi.

Riflessioni

35 **D** Alle sopramentovate lettere del Sig. Dottore Teodoro Bonati pare non essere troppo sicura la conseguenza tirata dalle sperienze fatte col quadrante, che a maggiori profondità, non però troppo vicine al fondo, corrispondere debbano velocità maggiori in una corrente; e ciò ancora per quelle stesse difficoltà da me esposte al n. 114. del primo volume. In quali lettere mi accenna pure alcune fue sperienze fatte col tubo ricurvo, che dalle nostre non discordano nel dare alzamenti sensibilmente uguali a profondità diverse in una medesima sezione. Onde esso inclina a conchiudere l'uniformità del movimento in tutto il corpo di acqua. Il che non si può generalmente concedere, o negare, potendo ne' diversi casi verificarsi l'una e l'altra cosa, siccome in altri nè l'una, nè l'altra; ma sia sempre necessario badare alle circostanze in quella guisa appunto, che le soprariferite sperienze ne resero avvertiti nell'uso della regola delle due sezioni, e del tubo ricurvo, e molto più necessaria rendesi cotale avvertenza nell'uso del quadrante, comunque a prima giunta sembri un istrumento assai semplice, e geometrico: mentre in pratica riesce di un uso assai dilicato, anzi difficilissimo, a segno, che fin'ora non ci è riuscito fare con esso veruna sperienza da poterli paragonare con alcuna delle molte fatte in altre maniere, nemmeno trovarla fatta da altri, non ostante il numero dei dottissimi suoi approvatori. La principalissima circostanza da avvertirsi si è la qualità della sezione, che con esso vuolsi misurare, se sia affatto libera, oppure tutta, o in parte impedita, o ringurgitata, perchè nelle sezioni affatto libere facilmente si accordano tutti i metodi; ma non così nelle altre, le quali per altro sono le più frequenti ad incontrarsi. Generalmente però, dove non trovinsi circostanze straordinarie, del quadrante può dirsi, che ogni qualvolta col semplice allungamento del filo, o abbassamento del centro del quadrante cresce l'angolo di distrazione del pen-

dolo, cresce ancora la forza della impressione, e conseguentemente la celerità, e farsi uguali le impressioni, quando uguali fanno gli angoli di distrazione: purchè le immersioni non facciano a troppo grandi profondità, o con pendoli di gravità specifica sproporzionata alla forza della corrente, e questo medesimo non è così facile a determinarsi.

Tali per avventura sono le immersioni riferite al n. 114. del primo volume, e particolarmente nella quinta, e sesta esperienza, nelle quali al successivo allungamento del filo corrisponde un qualche accrescimento nell'angolo, e però delle tangenti rappresentanti le forze della impressione nella palla.

Nella state del 1769., mentre nel canale de' mulini, e sotto al nostro ponte, scorreva l'acqua con un'altezza di circa 40. pollici, se ne tentarono diverse; ma sul più bello fummo pressochè sempre obbligati a desistere per li troppo frequenti disturbi, ed accidenti. Tuttavia ne riferirò alcune.

Alli 10. luglio il centro del quadrante essendo elevato sopra la superficie della corrente pollici 60., linee 7., il peso assoluto del globetto essendo di once Torinesi otto, o sieno grani 4608.

	<i>Lunghezze del filo</i>	<i>Angoli di di- strazione</i>	<i>Immersioni del glo- betto</i>
Piedi	5. 6.	Gradi 21. 30"	Pollici 4. lin. 8.
	6. 0.	30.	9. 8.
	7. 0.	38.	17. 10.
	8. 0.	40.	22. 6.
	9. 0.	40.	25. 4.
	10. 0.	40.	28. 1.

Alla sera del medesimo giorno il centro del quadrante essendo elevato sopra la superficie della corrente poll. 65. 4., ed il globetto dello stesso suddetto peso di once otto.

<i>Lunghezze del filo.</i>	<i>Angoli di di- strazione</i>	<i>Immersioni del glo- betto</i>
Piedi 9. 0.	Gradi 35.	Pollici 19. lin. 7.
10. .	36.	23. 0.
12. .	38.	53. 5.
		<i>l'immersione sarebbe</i>

mentre l'altezza della corrente non era che circa poll. 40., e però la palla toccava il fondo, ciò che nelle grandi profondità, e nelle correnti veloci, è assai difficile ad accertare.

Alli 14. Settembre il centro essendo elevato pollici 40. sopra la superficie della corrente, e 'l globetto del suddetto peso.

Piedi 4. 0.	Gradi 24.	Pollici 3. 10.
4. 6.	27.	8. 3.
5. 0.	22. 30''	15. 5.

Immergendosi il tubo ricurvo alle tre qui notate profondità di pollici 3. 10., 8. 3., 15. 5., gli alzamenti dell'acqua nel tubo sopra la superficie esteriore trovaronsi di linee 16., 20., e 10. Le prime di codeste osservazioni, anche supposto l'errore di qualche grado nell'angolo di distrazione del pendolo, mostrano ad evidenza, che le velocità verso la superficie fossero minori, che a qualche profondità, e la quarta, quinta, e sesta immersione della prima osservazione, avendoci dati sensibilmente uguali gli angoli di distrazione, ne mostrano sensibilmente uguali le celerità alle profondità di pollici 22. 6., 25. 4., 28. 1.; ma la terza osservazione dei 14. Settembre mostra, che alla profondità di poll. 18. 5. la velocità era minore, che nelle parti più elevate dal fondo; lo stesso ne mostra ancora il minor alzamento dell'acqua nel tubo ivi immerso, e ciò perchè in tal tempo era massimamente la corrente, e tale perseverò tutto l'autunno, anzi tutto dicembre, togliendoci il comodo di fare varie altre ideate sperienze.

*Descrizione della stadera idraulica, e di alcune
sperienze con essa fatte.*

36 **A** fine di esplorare praticamente la forza d'impressione di una corrente contro di un piano direttamente ad essa opposto, si preparò una macchinetta (*tav. 1. fig. 1.*), da noi detta stadera della seguente forma.

Ella componesi principalmente da uno scapo, o stanga di ferro, e da un listelletto, o riga pure di ferro, che ad angoli retti ne lo attraversa, dividendolo in due braccia disuguali, il più lungo di pollici 38., l'altro solamente di otto, compreso un globo, o massa di piombo, in cui termina, e con cui equilibrafi col braccio lungo. Questo è diviso in piedi, pollici, e linee del piede Parigino, e per esso s'assi scorrere, mediante un anello, in cui collocare si possono diversi pesi.

Il listelletto, o riga è pur anche diviso in piedi, pollici, e mezzi pollici, ed è lungo in tutto pollici 63. nella sua parte superiore sonovi undici buchi fra di loro distanti da tre in tre pollici. L'infimo buco dista dalla estremità inferiore per pollici 32. e mezzo; a questa adattasi un piano quadrato, che ha pollici 8. 5. 9. di lato, acciò la sua area sia di un mezzo piede quadrato. Questo piano quadrato è di ottone, e lo chiamiamo palmetta, o paletta, che presentare deesi direttamente alla corrente, mentre la riga, che la sostiene, presenta la sua costa fatta a mandorlo, per diminuirne contra essa la impressione.

Lo scapo equilibrafi sopra due perni angolari per di sotto, e portati da un sostegno dalle due bande fitto al fondo di un telaioetto, che da prima era immobile, e che poi si rese scorrevole fra gl'incastri di un altro telaio più grande, o dicasi di un castello verticale (*tav. 1. fig. 2.*), portato da una base quadrangolare assai pesante, acciò la macchina reggasi ferma nelle sperienze. Ad ognuno dei quattro angoli della

basse evvi una vite di ferro, con che possono disporli ben verticali le colonnette, o montanti del castello.

Nella parte superiore del telaioetto evvi un ritegno, ed in questo un'apertura larga linee 15., lunga 50., per cui passa la parte superiore della riga, acciò fare non possa grandi oscillazioni, o sieno grandi angoli di deviazione dalla posizione verticale.

Ognuno dei due montanti del castello lascia un libero giuoco al telaioetto del sostegno alto piedi 3., largo poll. 4., e la distanza tra i due montanti è di 9. pollici, e si conservano fra di loro paralleli, non solamente perchè immobilmente fitti nella base, ma dallo stesso telaioetto del sostegno, che scorrere dee tra le loro incanalature.

Le cose essendo così disposte, quando la riga, che porta la paletta trovasi verticale, lo scapo necessariamente trovasi orizzontale. Quindi, se qualche forza urtando, o spingendo la paletta, rimuove la riga dalla situazione verticale, questa forza può misurarsi con qualche peso collocato nella coppa scorrevole lungo allo scapo, notando la quantità di esso peso, e la sua distanza dal centro del movimento.

Il centro della riga dista dalla sua estremità inferiore per piedi 2. 8. 5., e dalla superiore per piedi 2. 6. 7., e però dal mezzo della riga dista per linee 11.

Il peso della riga è di onces 69., grani 498., quello della paletta con tutti i suoi accessori di anelli, viti ec., è di onces 44. grani 332.

Il centro di gravità della paletta dista dal suo lembo inferiore per pollici 4. 4. 4., e dal superiore per poll. 4. 1. 5., la riga colla paletta insieme pesano onces 114., grani 254.

Il centro del movimento trovasi sempre linee 10. sotto a qualunque dei buchi, ove si arresti la riga nello scapo. Quindi per avere la distanza del centro di gravità della paletta dal centro del movimento, da tutta la lunghezza compresa tra il buco, ove è arrestata la riga, e la sua estremità inferiore, dovranno sempre levarsi pollici 4. 5. 2. 4.

L'uso della macchina è molto semplice, poichè disposta da principio la riga ben verticale, e conseguentemente ben orizzontale lo scapo, si abbassa la paletta fino a che col suo lembo inferiore sia a fior di acqua, poi s'immerge per pollici 8. 5. 9., cioè per tutta la sua altezza; indi lungo allo scapo collocasi un qualche peso, il quale si accresce, o si diminuisce, oppure si avvanza, o si allontana dal centro del movimento, finattanto che facciasi equilibrio, cioè finattanto che la riga si conservi verticale, non ostante l'urto continuo dell'acqua nella paletta. Notandosi allora diligentemente tanto il peso, quanto la sua distanza dal centro del movimento.

Lo stesso dee praticarsi in ogni altra immersione della paletta a qualunque profondità sotto la superficie della corrente.

Moltiplicandosi poscia il peso per la sua distanza dal centro del movimento, il prodotto sarà uguale al momento, o dicasi alla forza della impressione dell'acqua contro la paletta, e dividendosi codesto momento per la distanza del centro di gravità della paletta da quello del moto, il quoziente equivarrà al peso di un parallelepipedo acqueo, la cui base è di un mezzo piede quadrato, e l'altezza troverassi in questo modo: sapendosi, che un piede cubico Parigino di acqua pesa libbre Parigine 70., o più veramente, e giusta le nostre sperienze libbre 69., o sieno once 1104.; dunque un mezzo piede cubico peserà once 552.; ma un mezzo piede cubico di acqua avrà un'altezza di dodici pollici, se abbia di base un mezzo piede quadrato; dunque se si faccia, come once 552. al peso ritrovato nella sperienza, così pollici 12. di altezza ad un'altra, essa sarà la ricercata del parallelepipedo acqueo.

S P E R I E N Z A P R I M A.

Alli 18. settembre 1768. correndo pel conduttore l'acqua alta pollici undici alla terza scala, s'immerse la paletta per l'intera sua altezza, trovandosi il suo centro di gravità lon-

tano da quello del movimento pollici 48. 3. 8., ove per l'equilibrio vi abbisognò un peso di libbre 25. Torinesi, posto sullo scapo alla distanza di pollici 28. 7.

Allungata di tre pollici la riga, e però di altrettanti più immersa la paletta per l'equilibrio, oltre alle libbre 25. poste alla distanza di pollici 36., vi abbisognò ancora un altro peso di libbre 5. 10. posto ad una distanza di poll. 36. 6.

Per la prima immersione moltiplicando libbre 25. per pollici 28. 7., trovasi un momento di 714. 7., che diviso per 48. 3. 8., dà il quoziente di libbre 16. 10. 4., cioè poco più di once 102.

Per la seconda immersione moltiplicando libbre 25. per pollici 36., e libbre 5. 10. per pollici 36. 6., la somma 1078. dei due prodotti 900., e 178. farà il momento, che diviso per pollici 51. 3. 8. dà il peso di un paralelepipedo acqueo di once 252., facendosi ora come once 552. ad once 202., così pollici 12. ad un altro numero, trovasi pollici 4. 4. per l'altezza del paralelepipedo acqueo della prima immersione, e per la seconda facendosi come once 552. ad once 252., così pollici 12. ad un altro numero, trovasi pollici 5. 5. per l'altezza del paralelepipedo acqueo della seconda immersione.

2.^a

Alli 21. ottobre nel canale de' mulini s'immerse la paletta pollici 9., cioè mezzo pollice sotto al pelo della corrente, ove il suo centro di gravità distava da quello del moto pollici 48. 3. 8., ed equilibrò con un peso di libbre 25. Torinesi, posto alla distanza di pollici 22. 6.

Ivi pure immerso il tubo Pitot, si fece in esso la totale altezza dell'acqua di pollici 5. 10., e il suo maggiore alzamento sopra la superficie esteriore di pollici 1. linee 10.

Allungata di sei pollici la riga, e però d'altrettanti più immersa la paletta, si equilibrò pure col peso di libbre 25. posto alla distanza di pollici 22. 6., e nel tubo immerso alla profondità di 10. pollici, si fece la totale altezza dell'acqua di pollici 11. 10., cioè ebbesi il maggiore alzamento sopra

la superficie esterna di pollici 1. 10., come nella precedente.

Allungata altri sei pollici la riga: fecesi l'equilibrio col peso di libbre 25. posto alla distanza di pollici 24. 6., e nel tubo ivi immerso alla profondità di 16. pollici, si fece l'altezza totale dell'acqua di pollici 18. 1., e quindi il maggiore alzamento di pollici due circa, ed immergendosi il tubo alla profondità di pollici 22., l'altezza tutta fu di pollici 24., ed immerso pollici 28., l'altezza tutta fu di pollici 30., cioè ebbesi il maggiore alzamento in queste immersioni di pollici due.

In questa speriienza le due prime immersioni della paletta, e del tubo concordano nel darci velocità sensibilmente uguale, ed un po' maggiore nella terza, ed il tubo le dà sensibilmente uguali nelle seguenti più profonde sue immersioni, ed alquanto maggiori che nelle prime.

Le seguenti sperienze dovrebbero essere più esatte, perchè in queste già erasi fatta più comoda la macchina, con essersi reso scorrevole fra gl'incastri del castello il sostegno dello scapo, e della riga, onde aveasi modo di abbassare, od innalzare il centro del movimento, e fissarlo come meglio ne pareva; ma l'ostinata siccità di quest'anno non ci permise farne a grandi profondità, come si desiderava.

3.^a

Alli 14. settembre 1769. immersa la paletta intera sotto la superficie dell'acqua, e distando il suo centro di gravità da quello del moto pollici 42. 3. 8., si equilibrò col peso di libbre 14. posto alla distanza di pollici 28. 1.

Abbassato il centro dello strumento per tutta l'altezza della paletta, cioè per pollici 8. 5. 6. si ebbe l'equilibrio col suddetto peso di libbre 14., posto alla distanza di pollici 24.

Abbassato ancora il detto centro per pollici 6. 8., si ebbe l'equilibrio con un peso di libbre 10., posto alla distanza di pollici 26. 9.

La poca altezza viva della corrente, e le irregolarità del fondo del canale possono certamente aver parte alla diminuzione della forza della imprefione; ma a questo proposito accenne-

accenneremo fra poco un'altra cagione della diminuzione medesima.

4.^a

Alli 16. settembre la paletta, immersa interamente sotto al pelo della corrente, avendo il suo centro distante da quello del moto pollici 45. 3. 8. si equilibrò con un peso di libbre 14. posto alla distanza di poll. 31. 9. Quindi abbassato successivamente di tre poll. per volta esso centro, lo stesso peso di libbre 14. equilibrò colla forza delle impressioni, posto alla distanza di pollici 30. 9., 29. 3., 27. 9., 26. 0., 24. 3., 23. 3., 21. 3.

E dopo l'ultima immersione in luogo del peso di libbre 14., sostituendosi un peso di libbre 10., questo si equilibrò posto alla distanza di pollici 29. 9.

Consequentemente il primo momento, che trovasi di 444. 6. andò successivamente diminuendo nella ragione delle suddette distanze del peso di libbre 14., riducendosi in fine ad essere di 297. 6.

5.^a

Alli 27. detto settembre si rinnovò la sperienza nella medesima maniera, ma valendoci del peso di libbre 10., ed ebbesi equilibrio alle distanze di pollici 33. 4., 33. 0., 33. 0., 34. 3., 32. 3., 30. 3., 28. 6., 25. 0.

E fatte ivi cinque immersioni del tubo alle profondità di pollici 4. 6., 7. 6., 10. 6., 13. 6., 16. 6., si fecero in esso le altezze totali dell'acqua di pollici 6. 0., 9. 0., 11. 9., 17. 9., e quindi gli alzamenti sopra la superficie esteriore furono di linee 18., 18., 15., 15., 15.

- 38 Anche in questa sperienza trovasi colli due strumenti l'acqua più veloce verso la superficie, che verso il fondo; ma la stadera dinota un decrescimento continuo, e non così il tubo. La succennata scarfezza di acqua non avendoci permesso di fare sperienze a profondità maggiori; in queste avvertiremo, che il successivo decrescimento de' momenti datici dalla stadera, non dee attribuire al semplice decrescimento delle velocità; ma molto più alla resistenza, che fa l'acqua stessa al movimento della paletta, non potendo questa muoversi senza sollevare nello stesso tempo quel corpo di acqua, che le

Q

ita sopra, la quale comunque corrente non tralascia di gravitare, come se fosse stagnante sopra la paletta, che tende a sollevarla, quale gravitazione appunto cresce proporzionalmente all'altezza dell'acqua da sollevarsi. Onde gli sviamenti della riga dalla posizione verticale si fanno coll'eccesso della forza del moto progressivo sopra la semplice gravitazione, talmente che l'acqua gravitante sopra la paletta dovendo muoversi con una direzione diversa da quella della corrente, fa necessariamente col suo peso una resistenza all'alzamento della paletta medesima.

In vece delle sperienze, che non poterono farsi a maggiori profondità, se ne fece un'altra assai più importante, la quale pone in chiaro, quanto finora si è detto a questo proposito, e tutto insieme ne assicura della verità del corollario secondo della proposizione 36. del secondo libro de' principj della filosofia Newtoniana.

6.^a

Alli 19. ottobre si adattò il tubo cilindrico di un pollice di diametro, lungo otto, all'apertura del piano infimo della torre. La vena del qual tubo nelle sperienze del primo volume trovai di pollici quadrati 0. 7. 6. circa. A pochissima distanza dall'orifizio esteriore del tubo aggiustossi il centro della paletta, il quale distava da quello del movimento per pollici 36. 3. 8. Riempita la torre, ed aperto il tubo, l'acqua indi uscente con grande impeto urtava nella paletta. Durante il tempo della sperienza, che fu assai lungo, conservossi l'acqua sopra l'orifizio del tubo costantemente alta piedi 21. 7. 10., o sieno pollici 259. 10.; ed ebbesi l'equilibrio, 1.^o con un peso di libbre 20. posto alla distanza di poll. 28. 10., 2.^o con un altro peso di libbre 16. posto alla distanza di poll. 36. 2., 3.^o con altro peso di libbre 25. posto alla distanza di pollici 23. 1.

Moltiplicando ciascuno di questi tre pesi per la sua rispettiva distanza dal centro del moto, trovansi li momenti 576. e due terzi, 578. e due terzi, e 577., de' quali il medio fassi 577. e quattro noni. Dividendosi 577. e quattro noni

per la distanza del centro della paletta dal centro del moto, cioè per pollici 36. 3. 8., trovansi libbre Torinesi 15. 11., o sieno once 191. per il peso dell'acqua, che urtava nella paletta.

Per altra parte moltiplicando l'area della vena del tubo, cioè pollici quadrati 0. 7. 6. per l'altezza dell'acqua sopraffante all'orifizio del tubo, cioè per pollici 259. 10., trovansi pollici cubici 162. 4. 9. E computandosi il piede cubico Parigino di libbre Parigine 69., il che pure risulta dalle nostre sperienze riferite al num. 104. del primo volume, il pollice cubico peserà grani 368.; e quindi li pollici cubici 162. 4. 9. peseranno grani 59761., cioè once 103. e tre quarti, o sieno libbre Torinesi 8., once 7., grani 433., il cui doppio sono libbre 17., once 3., grani 290., le quali, giusta il corollario Newtoniano, fanno tutta la forza, che genera la quantità del moto nell'acqua uscente dal tubo, e quale forza è poco più delle ritrovate libbre 15. 11.

Cotale piccola differenza tra la teoria, e la sperienza potendosi facilmente attribuire alla somma difficoltà di operare colla necessaria squisitezza, e di avere macchine così delicate, che sfuggire non lascino le misure più minute.

Si volle nello stesso giorno sperimentare un tubo di doppio diametro; ma al primo aprirsi del suo orifizio fu tale l'impeto dell'acqua, che ne spinse addietro la macchina, ne scompaginò il ponte volante, su cui era posata, scaricòne addosso un nembo così furioso, che ne fece passare la voglia di ritornare all'impresa.

Appendice idrometrica;

POichè tutte le cose dette, e le sperienze riferite tanto nel primo, che in questo secondo volume, tendono principalmente allo accertamento dei principj, ed allo spianamento delle difficoltà, che cotanto ingombrano la pratica in questa materia, e che ogni teoria comunque per altri riguardi eccellente, se in fine non vantaggio rechi, non ha facilità, o

comodo all' uso comune , non è al più , che una virtuosa curiosità. Quindi è , che parvemi dover conchiudere il primo volume col ridurre alla maggiore semplicità il computo delle portate , o dispense delle dare luci , o sezioni , giusta la consuetudine del nostro paese , e che con pari facilità può estendersi a quella di ogni altro ; ma avendo per isperienza conosciuto , che un così genere di computo , non ostante la sua semplicità imbarazza non solamente i poco pratici , ma talora valenti calcolatori ancora , nè potendosene sperare altro più semplice , ed accomodato all' uso comune , penso dover conchiudere questo secondo , ritoccando lo stesso argomento , senza però ridire le cose già dette in quello ; ma con farne l' applicazione ad alcune formole semplicissime insieme , e necessarie , a determinare le dimensioni di una luce , o sezione , acciò la medesima tramandare possa una data quantità. Vero è , che se vago fossi della sola eleganza , ciò fare potrei con una formola generale ; ma coloro , che meno versati sono nel calcolo algebrico , potrebbero incontrarvi altre difficoltà nel valersene in caso di bisogno.

- 39 Ora la consuetudine di misurare le acque correnti nel Piemonte , ed in alcune altre province di Lombardia , essendo di valersi di una misura comune detta ruota , o quadretto : sottointendendo in questa denominazione l' espressione di una quantità di acqua , che in forza della semplice pressione uscirebbe nel dato tempo per una bocca quadrata di un piede per ogni lato , aperta sotto al pelo dell'acqua , considerata come stagnante , ed ogni ruota , o quadretto intendendosi composto da dodici parti uguali , che chiamano once : conviene avvertire , che non a capriccio , o per genio di novità , abbiamo distinte due sorti di ruota , cioè grande , e piccola ; quella dà piedi cubici 4. 1. 4. , e questa solamente piedi 2. 6. 3. per ogni minuto secondo. Ciò si è fatto , perchè queste due quantità sono come due limiti dalla natura stessa fissati. Il primo , o sia la ruota grande si avrebbe , se l' acqua nell' uscire per la detta bocca di un piede quadrato , non soffrissi veruna sorta di resistenza , ed

a farsi tale tanto più si avvicina, quanto più si diminuiscono le resistenze con tubi, od imbuti; ma oltre ad essa non è possibile, ch'ella si accresca con artifizi di tal sorta. Il secondo limite, o sia la ruota piccola, ed ordinaria ha sempre luogo in tutte le luci, e sezioni semplici, per le quali passando l'acqua non soffre, che le naturali, ed ordinarie resistenze.

- 40 Ciò posto: se l'altezza perpendicolare di un piede presa sotto al pelo dell'acqua, considerata come stagnante, dicasi $= a$; il complesso delle velocità, corrispondenti a ciascun punto dell'altezza medesima, potrà denotarsi con $a\sqrt{a}$. Similmente se un'altezza variabile presa nella stessa maniera sotto al pelo dell'acqua dicasi x ; il complesso delle velocità corrispondenti a ciascun punto dell'altezza x , potrà denotarsi con $x\sqrt{x}$; e se m esprima la larghezza di una luce, o sezione, di cui si cerchi l'altezza x tale, che per essa tramandisi un dato numero n di ruote, o parti di ruota; si avrà l'equazione $m x\sqrt{x} = n a\sqrt{a}$, e quadrando da ambe le parti, farassi $m^2 x^3 = n^2 a^3$. Onde $x^3 = \frac{n^2 a^3}{m^2}$; e finalmente $x = \sqrt[3]{\frac{n^2 a^3}{m^2}}$. Formola prima.

ESEMPIO PRIMO.

Vogliansi estrarre cinque ruote di acqua con una bocca rettangolare larga tre piedi, di cui se ne cerca l'altezza x sotto al pelo dell'acqua, sarà in questo caso $m = 3$, $n = 5$; ed a essendo di un piede, cioè di once 12., sarà $\frac{n^2 a^3}{m^2} = \frac{25 \times 1728}{9} = 4800.$; quindi l'altezza ricercata $x = \sqrt[3]{4800.}$, prossimamente = once 17.

In fatti moltiplicandosi la larghezza data 3. 0. 0. per l'altezza ritrovata 1. 5. 0, si ha l'area della bocca di piedi quadrati 4. 3. 0., e questa moltiplicata per la radice quadrata

di 4. 5. 6., che trovasi di piedi lineari 1. 2. 3., fassi la dispensa di piedi cubici 5. 0.

ESEMPIO SECONDO.

Vogliansi estrarre once 9. di acqua con un bocchetto largo piedi 2.

Qui $m = 2$, $n = \frac{3}{4}$ di una ruota. Conseguentemente $\frac{n^2 a^2}{m^2} = \frac{9 \times 1728}{4 \times 16} = 243.$, e perciò $x = \sqrt[3]{243}$. prossimamente = once lineari 6., punti 3.

In fatti moltiplicandosi la larghezza 2. 0. 0., per l'altezza 0. 6. 3. trovasi la superficie della bocca di piedi quadrati 1. 0. 6., e questa moltiplicata per la radice quadrata di 0. 6. 3., cioè per piedi lineari 0. 8. 8., dà la dispensa di ruote 0. 9. 0.

Se fosse data l'altezza della bocca, e se ne cercasse la larghezza, basterà considerare nella formola come cognita la x , e come incognita la m ; e perchè $m^2 x^3 = n^2 a^3$, farà $m^2 = \frac{n^2 a^3}{x^3}$, ed $m = \sqrt{\frac{n^2 a^3}{x^3}}$.

Così nel primo esempio, essendo $n = \frac{3}{4}$, ed $x = 1. 5. 0.$ trovasi $m = \sqrt{\frac{43200}{4800}} = \sqrt{9} = 3.$ piedi; e nel secondo

esempio, essendo $n = \frac{3}{4}$, ed $x = 0. 6. 3.$, trovasi $m = \sqrt{\frac{15552}{3888}} = \sqrt{4} = 2$ piedi.

41 Se la luce, o bocca aprire si debba sotto un dato batteute b , ritenute nel resto le denominazioni del caso precedente.

In questo caso dovrà farsi $m \times \sqrt{b+x} \times \sqrt{b+x} = m b \sqrt{b}$
 $= n a \sqrt[3]{a}$, o pure $m \times \sqrt{b+x}^3 = n \times \sqrt[3]{a^3} + m \times \sqrt[3]{b^3}$, ove dividendo per m , e quadrando le parti, fassi $\overline{b+x} =$

$\frac{n^2 a^3 + m^2 b^3 + 2mnab\sqrt{ab}}{mm}$, ed estraendo la radice cubica da

ciascun dei due membri si trova $b + x = \sqrt[3]{\frac{n^2 a^3 + m^2 b^3 + 2mnab\sqrt{ab}}{mm}}$

e quindi $x = \sqrt[3]{\frac{n^2 a^3 + m^2 b^3 + 2mnab\sqrt{ab}}{mm}} - b$, che sarà la formola per questo secondo caso.

Sia $n = 2$, $m = 4$, ed il dato battente b sia di tre once. Sarà $x = \sqrt[3]{\frac{10800}{16}} - 3$, o sia $= \sqrt[3]{675} - 3 =$ once 8., punti 9., meno once 3, cioè $x =$ once 5., punti 9.

Se fosse data l'altezza $x =$ once 5. 9., e si cercasse la larghezza m , allora la formola diviene $m^3 - \frac{2nab\sqrt{ab} \times m - n^2 a^3}{3b^2 x + 3bx^2 + x^3} = 0$, equazione quadratica, che si fa risolvere.

42 Se fosse incognito il battente, e data la larghezza, ed altezza della bocca, e si cercasse quanto essere debba esso battente, acciocchè tramandisi da quella la data quantità di acqua.

In questo caso la formola $m^3 \times b + x = n^2 a^3 + m^2 b^3 + 2mnab\sqrt{ab}$ non rimarrà nel terzo grado, perchè ordinandosi i termini secondo l'incognita b , avrassi in primo luogo $m^3 \times (3b^2 x + 3bx^2 + x^3) = n^2 a^3 + 2mnab\sqrt{ab}$. Dove volendosi togliere il radicale $\sqrt{ab}$, allora l'incognita b ascenderà a quattro dimensioni, e ne verrà in fine una equazione di quarto grado compita, in cui li coeficienti dei suoi termini divengono assai composti. Onde la riduzione, ancora che per sola approssimazione, diventa assai penosa.

43 Ma volendosi ridurre questo caso ad una equazione pura del terzo grado, converrà valersi del metodo del n. III. del primo volume; cioè, dicasi la data dispensa da farsi $= q$, la larghezza della bocca $= f$, l'altezza $= b$, quindi $\frac{q}{bf}$ esprimerà la celerità media per la data bocca, quale celerità corrisponderà ad un'altezza capace a produrla, e che

si fa trovare, e cotale altezza ritrovata dicasi $= a$. Questa cominciando dal punto più sublime del battente terminerà in alcun punto dell' altezza b , e qual punto è il centro delle celerità per detta altezza b ; il residuo incognito di b dicasi $= x$, e farassi l'asse intero della parabola $= a + x$, cui corrisponde una celerità come $\sqrt{a+x}$, e $\frac{2}{3} \overline{a+x} \sqrt{a+x}$ ne esprimerà il complesso di tutte le celerità corrispondenti ad ogni punto dell'asse $a+x$; cioè ne esprimerà l'area della semiparabola, da cui sottrando l'area $\frac{2}{3} a \sqrt{a}$ competente all'ascissa a , rimarrà la metà dell'area del trapezzo parabolico, rappresentante il complesso delle velocità corrispondenti ad ogni punto dell'altezza data b ; ma un tale trapezzo è uguale al prodotto dell'altezza b moltiplicata nella celerità media $\frac{g}{bf}$, che è la effettiva; in vece di questa prendasi la relativa $\sqrt{a}$, e farà $\frac{b\sqrt{a}}{2}$ l'espressione della metà di detto trapezzo. Onde farassi $\frac{2}{3} \overline{a+x} \sqrt{a+x} - \frac{2}{3} a \sqrt{a} = \frac{b\sqrt{a}}{2}$, o pure $\frac{2}{3} \overline{a+x} \sqrt{a+x} = \frac{2}{3} a \sqrt{a} + \frac{b\sqrt{a}}{2}$; moltiplicando l'equazione per $\frac{3}{2}$, e quadrandone le parti, avrassi $\overline{a+x}^3 = a^3 + \frac{3a^2b}{2} + \frac{9b^2a}{2}$ ed estraendosi la radice cubica da ciascuna parte; trovasi finalmente $a+x = \sqrt[3]{(a^3 + \frac{3a^2b}{2} + \frac{9b^2a}{16})}$. Formola terza.

E S E M P I O.

Sia come nel caso antecedente $f = 4$ piedi, $g = 2$ quadretti, o ruote, l'altezza data b della luce di once 5.9.; onde l'area della luce sia di piedi quadrati 1. 11. o., per cui

cui dividansi le due ruote, le quali si considereranno come assolute, cioè senza restrizione di vena, sicchè facciano piedi cubici 8. 2. 8. per ogni minuto secondo. Dividendo 8. 2. 8. per 1. 11. 0., trovasi il quoziente, o sia la celerità media di piedi 4. 3. 6., con quali volendosi trovare l'altezza capace a produrre tale celerità, dovrà dividerli il quadrato 18. 5. 0. di piedi 4. 3. 6., per il parametro 38., trattandosi di piedi Torinesi, ed il quoziente once 5. 9. 9., farà l'altezza a , di cui si abbisogna nella formola, in cui ponendosi i valori di a , e di b , trovasi $a + x$ prossimamente $= \sqrt[3]{670} =$ once 8., punti 7. circa, da cui sottrando l'altezza data $b =$ once 5. 9., trovasi il battente di once 2., punti 10., il quale troverebbesi di 3. once, se il calcolo fosse esatto.



ESERCITAZIONE PRIMA.

Sopra le progressioni geometriche.

PARTE PRIMA

Delle serie composte da un numero finito di termini.

DEFINIZIONE

Progressioni, o serie geometriche simili sono quelle, delle quali un medesimo è l'esponente della ragione, ed uguale il numero de' termini.

TEOREMA.

Qualunque potestà di tutta una serie geometrica sta alla somma delle potestà simili di ciascun termine, in ragione composta della differenza delle potestà del primo, e del secondo termine, alla differenza delle potestà dei termini estremi, e della potestà della differenza degli estremi, alla potestà della differenza tra il primo, e secondo termine in una simile serie, accresciuta di un termine.

Sia una serie geometrica $u, ud, ud^2, ud^3, \dots, ud^{n-1}$, in cui u è il primo, e minor estremo, d l'esponente della ragione, n il numero dei termini, m l'indice della potestà; e quindi il termine aggiunto ud^n . Sia la somma della progressione $= a$; farà la potestà della medesima $= a^m$, la somma delle potestà di ciascun termine potrà esprimersi con $a^{m-1}b$. Cio posto, dico essere $a : a^{m-1}b$, oppure $a : b$

in ragione composta di $u^n d^n - u^n : u d^n - u^n$, e di $u d^n - u^n$:

$\frac{u \cdot d - u}{d - 1}$, oppure dividendo per u^m i termini della prima di queste, e per u i termini della seconda, essere $a : b :: d^m - 1 :$

$d^m - 1$, e $:: d^m - 1 : d - 1$; cioè $a : b :: d^m - 1$,

$\times \frac{d^m - 1}{d^m - 1} : \frac{d^m - 1}{d^m - 1} \times \frac{d - 1}{d - 1}$ nella serie simile 1, d , d^2 ec. d^{m-1} , d^m , accresciuta del termine d^m . Imperciocchè per la

propofizione 35. del 9. di Euclide, farà $u d^{m-1} + \frac{u d^{m-1} - u}{d - 1}$

$= a$. Moltiplicando per $d - 1$, si fa $u d^m - u$, oppure

$a \times \frac{d^m - 1}{d^m - 1} = a \times \frac{d - 1}{d - 1}$. Elevando ambe le parti alla pote-

stà m , haffi $u^m \times \frac{d^m - 1}{d^m - 1} = a^m \times \frac{d - 1}{d - 1}$, e dividendo per

$\frac{d^m - 1}{d^m - 1}$, trovasi $u^m = \frac{a^m \times \frac{d - 1}{d - 1}}{\frac{d^m - 1}{d^m - 1}}$.

La serie delle potestà m di ciascun termine si è u^m , $u^m d^m$, $u^m d^{2m}$ ec. ... $u^m d^{m^2 - m}$, la somma $u^m d^{m^2 - m} + \frac{u^m d^{m^2 - m} - u^m}{d^m - 1}$

farà $= a^{m-1} b$; moltiplicando da ambe le parti per $d^m - 1$,

faffi $u^m d^{m^2} - u^m$, o fia $u^m \times \frac{d^{m^2} - 1}{d^{m^2} - 1} = a^{m-1} b \times \frac{d^m - 1}{d^m - 1}$;

e dividendo per $d^{m^2} - 1$, avraffi $u^m = \frac{a^{m-1} b \times \frac{d^m - 1}{d^m - 1}}{\frac{d^{m^2} - 1}{d^{m^2} - 1}}$.

Sarà dunque $\frac{a^m \times \frac{d - 1}{d - 1}}{\frac{d^m - 1}{d^m - 1}} = \frac{a^{m-1} b \times \frac{d^m - 1}{d^m - 1}}{\frac{d^{m^2} - 1}{d^{m^2} - 1}}$, e risol-

vendo l'equazione in proporzione, avraffi $a^m : a^{m-1} b$, o

fia $a : b :: \frac{d^m - 1}{d^m - 1} : \frac{d^m - 1}{d^m - 1}$.

R 2

E togliendo le frazioni, $a : b :: d^m - 1 : d^m - 1$:

$d^m - 1 \times d - 1$; cioè la potestà qualunque a^m fatta da tutta la serie sta alla somma delle potestà simili fatte da ciascun termine $a^{m-1} b$, in ragione composta della differenza $d^m - 1$ delle potestà del primo, e del secondo termine, alla differenza $d^m - 1$ delle potestà degli estremi, e della potestà $d^m - 1$ della differenza degli estremi, alla potestà $d - 1$ della differenza tra il primo, e secondo termine, nella simile serie $1, d, d^2$ ec. . . d^{m-1} , d^m accresciuta del termine d^m , come si propose.

Se m sia $= 1$, faraffi $a : b :: d - 1 : d^1 - 1 : d^1 - 1 \times d - 1$, cioè $a = b$.

Se $m = 2$, farà $a : b :: d^2 - 1 : d^2 - 1 : d^2 - 1 \times d - 1$

Se $m = 3$, farà $a : b :: d^3 - 1 : d^3 - 1 : d^3 - 1 \times d - 1$

Se $m = 4$, farà $a : b :: d^4 - 1 : d^4 - 1 : d^4 - 1 \times d - 1$

COROLLARIO.

Dunque, se l'esponente della ragione d sia incognito, esso verrà dato per le cognite a, b , e per i numeri m, n da una equazione algebrica, la quale farà di termini finiti di numero, quando l'indice delle potestà m farà numero intero; e perchè dividendosi la differenza delle potestà per la differenza dei lati, il quoziente ne dà ciascun degli omogenei componenti la potestà prossimamente inferiore, fatta dalla somma dei lati, ed ogni potestà divisa pel suo lato si abbassa di un grado, ne segue ancora, che dividendo tanto $d^m - 1 \times d - 1$, quanto $d^n - 1 \times d - 1$, per $d^m - 1 \times d - 1$, farà ancora $a : b :: d^{m-2} + d^{m-3} + \text{ec.} \dots + d + 1$

$$\times d^{m-1} : d^{am-1} + d^{am-1} + d^{am-1} + \text{ec.} \dots d^{am-1} \times d^{m-1}$$

Ponendosi $m = 2$, farassi $a : b :: d + 1 \times d^{m-1} : d^{m+1} \times d^{m-1}$; e dividendo per $d - 1$, $a : b :: d^n + 2 d^{n-1} + 2 d^{n-2} + \text{ec.} \dots + 2 d + 1 : d^n + 1$; cioè il quadrato di tutta la serie, alla somma de' quadrati di ciascun termine, sta come la somma di tutta la serie accresciuta di un termine, insieme con tutti li termini di mezzo, alla somma degli estremi, o pure componendo, e doppiando i conseguenti, avrassi $a + b : 2 b :: d^n + d^{n-1} + d^{n-2} + \text{ec.} d^n + 1$; cioè il quadrato di tutta la serie insieme colla somma dei quadrati di ciascun termine, sta alla medesima somma, come una simile serie accresciuta di un termine, sta alla somma dei due termini estremi; ed in somigliante maniera potrassi spiegare la ragione tra la potestà di altro grado di tutta una data serie, e la somma delle simili potestà di ciascun termine.

PROBLEMA PRIMO.

4 **D**Ata la somma degli estremi a , dei medii b , ed il numero dei termini n , di una serie geometrica: trovare l'esponente della ragione y .

Dicasi x l'estremo minore, sarà la serie $x + xy + xy^2 + \text{ec.} \dots + xy^{n-1}$, la cui somma $xy^{n-1} + \frac{xy^{n-1}}{y-1}$ sarà $= a + b$.

Moltiplicando per $y - 1$, fassi $xy^n - x$, o sia $x \times \overline{y^n - 1} = a + b \times \overline{y - 1}$, dividendo per $y^n - 1$, sarà $x = \frac{a + b}{y^n - 1} \times \overline{y - 1}$. Per l'ipotesi $xy^{n-1} + x$, o sia $x \times \overline{y^{n-1} + 1} = a$;

dunque, dividendosi per $y^{n-1} + 1$, farà $x = \frac{a}{y^{n-1} + 1}$;

quindi $\frac{a + bxy - 1}{y^{n-1}} = \frac{a}{y^{n-1} + 1}$: togliendo le frazio-

ni, si ha $a + bxy - y^{n-1} + y - 1 = a \times \frac{y^{n-1} + 1}{y^{n-1} + 1}$, cioè
 $ay^n - ay^{n-1} + ay - a + by^n - by^{n-1} + by - b =$
 $ay^n - a$; e levando comunemente $ay^n - a$, rimarrà $-ay^{n-1}$
 $+ ay + by^n - by^{n-1} + by - b = 0$. Ordinando
 l'equazione, e dividendo per b , trovasi $y^n - \frac{a - by^{n-1} + a + by}{b}$

$- 1 = 0$. In luogo di $\frac{a + b}{a}$ pigliandosi q , avrassi $y^n -$

$qy^{n-1} + qy - 1 = 0$, la quale sarà divisibile per $y - 1$

$= 0$, quando n sia numero dispari, e farassi in questo ca-

so la formola $y^{n-1} + 1 - qy^{n-2} + 1 - qy^{n-3} + \text{ec.}$

$\dots + 1 - qy + 1 = 0$; e se n sia numero pari,

la suddetta equazione sarà divisibile per $y^n - 1 = 0$, e

quindi per questo altro caso la formola farà $y^{n-2} - qy^{n-3}$

$+ y^{n-4} - qy^{n-5} + y^{n-6} - \text{ec.} \dots - qy + 1 = 0$;

dove le potestà pari di y sono affette del segno $+$, e le

dispari moltiplicate per q , sono affette del segno $-$, l'uso

però di codeste due formole abbisogna di alcune

OSSERVAZIONI.

In ambedue le formole trovandosi la potestà massima della incognita di grado pari, tutti i di lei valori potranno essere imaginarii. Il che succederà ogniquivolta le tre quantità date,

135
cioè la somma degli estremi, la somma dei termini di mezzo, ed il numero dei termini, non si accorderanno.

2.^a
L'ultimo termine in ciascuna delle medesime formole essendo l'unità, egli è pur anche necessario, che dei valori dell'incognita presi a due a due, l'uno sia l'inverso dell'altro, ed entrambi affetti col medesimo segno, quando saranno reali; e nel caso, che siano imaginarii, dovranno essere accompagnati da una medesima quantità reale, similmente affetta, e la porzione imaginaria verrà affetta con segni contrarii: altrimenti nè la loro somma q potrebbe essere reale, nè il prodotto dei valori di y , presi a due a due, e da tutti insieme, potrebbe farsi $= + 1$.

3.^a
In qualunque progressione geometrica composta di termini reali, trovansi due esponenti della ragione reali, positivi l'uno inverso all'altro, e l'uno maggiore dell'unità, per cui i termini continuamente crescono, e l'altro minore dell'unità, per cui i termini decrescono; ma le due progressioni, che da essi esponenti, o denominatori possono comporsi, non sono, che una medesima, e differiscono solamente in ciò, che i loro termini progrediscono con ordine contrario.

4.^a
In ogni progressione geometrica costituita da termini reali, farà sempre $\frac{a+b}{b}$, cioè q maggiore dell'unità; e quindi

$1 - q$ quantità negativa.

Con queste premesse potressi conoscere, se un dato caso particolare sia possibile sotto le prescritte condizioni. Ed ogni qualvolta il numero dei termini sarà maggiore del 4., ogni formola potrà abbassarsi ad un grado inferiore.

Sia in primo luogo $n = 3$. La formola sarà $y^2 + 1 - qy + 1 = 0$, dove ponendosi $q = 3 \frac{1}{2}$, trovasi $y = 3$, e $y = \frac{1}{3}$.

Sia $n = 5$. La formola farassi $y^4 + \sqrt{1-q}y^3 + \sqrt{1-q}y^2 + \sqrt{1-q}y + 1 = 0$, che ridurraffi al secondo grado nella seguente maniera.

Rappresenti a la somma delle due radici reali positive, e fra loro inverse; e l'ambigua b rappresenti la somma delle altre due. Moltiplichinsi fra di loro le equazioni $y^4 - ay^3 + 1 = 0$, e $y^4 - by^3 + 1 = 0$, ed il prodotto $y^8 - ay^7 + by^7 - ay^6 + by^6 - ay^5 + by^5 - ay^4 + by^4 - ay^3 + by^3 - ay^2 + by^2 - ay + by + 1 = 0$, si paragoni colla for-

mola $y^4 + \sqrt{1-q}y^3 + \sqrt{1-q}y^2 + \sqrt{1-q}y + 1 = 0$. Il paragone dei secondi termini ne dà $-a \dots b = 1 - q$; ma a , ed $1 - q$ sono quantità reali, dunque l'ambigua b è anche reale. Il paragone dei terzi termini ne dà $+2 \dots ab = 1 - q$; quindi $\dots ab = -q - 1$, dunque il piano ab dovrà avere avanti se il segno $-$; ma il di lui lato a è positivo, dunque l'altro lato b sarà negativo. Dunque avraffi $-a + b = 1 - q$, e $-ab = -1 - q$. Sono adunque da ritrovarsi due quantità, la somma delle quali sia $= -q - 1$, ed il prodotto da esse sia $= -q - 1$. Il che è un problema costitutivo di una equazione quadratica: Imperciocchè, se l'una, e l'altra delle indeterminate venga designata per x , coticchè $x - a = 0$, ed $x + b = 0$, dalla moltiplicazione di queste ne nasce

$$x^2 - ax - ab = 0, \text{ cioè } x^2 + 1 - qx - q - 1 = 0.$$

Sia ora $q = 3 \frac{4}{39}$, troveraffi positivo $x = 3 \frac{1}{3}$, il qual valore diviso in due fra loro inversi, ne darà i valori reali, e positivi di y , cioè 3, e $\frac{1}{3}$, ed il valoren egativo di x sarà

$$= \frac{-48}{39}, \text{ il quale pure diviso in due fra loro inversi, ne dà}$$

dà i valori immaginari di y , l'uno $= -\frac{8}{13}$, $-\sqrt{\frac{105}{169}}$,
e l'altro $= -\frac{8}{13} + \sqrt{-\frac{105}{169}}$.

Sia $n = 6$. La formola diverrà $y^4 - qy^3 + y^2 - qy + 1 = 0$, che come la precedente ridurra al secondo grado: perchè dicendosi a la somma dei due valori di y reali, positivi, e fra di loro inversi, e l'ambigua b la somma degli altri due, avranno le due equazioni componenti $y^2 - ay + 1 = 0$, e $y^2 \dots by + 1 = 0$, dalla moltiplicazione delle quali ne nasce l'equazione
 $y^4 - ay^3 + 2y^2 - ay + 1 = 0$,
 $\dots b \dots ab \dots b$

simile alla formola $y^4 - qy^3 + y^2 - qy + 1 = 0$.
 Dal paragone delle medesime, 1° ne risulta $-a \dots b = -q$; ma a , e q sono reali, dunque b è anche reale; 2° ne risulta $2 \dots ab = 1$, o pure $\dots ab = -1$, dunque il piano ab avrà avanti di se il segno $-$; ma il di lui lato a è positivo, dunque l'altro lato b sarà negativo; onde farà $-a + b = -q$, e $-ab = -1$.

Sono pertanto da ritrovarsi due quantità, la somma delle quali sia $= q$; ed il prodotto da esse sia $= 1$, che è un problema costitutivo di una equazione quadratica: perciò ciascuna delle indeterminate a , b designandosi per x , così che sia $x - a = 0$, $x + b = 0$. Dalla moltiplicazione di queste ne nascerà $x^2 - ax - ab = 0$, o sia $x -$
 $+ b$

$$qx - 1 = 0.$$

Ponendosi $q = 3 + \frac{1}{30}$ trovasi positivo $x = 3 + \frac{1}{3}$, il quale diviso in due parti fra loro inverse, ne dà li due valori di y reali, e positivi, l'uno $= 3$, e l'altro $= \frac{1}{3}$,

ed il valore negativo di x trovandosi $= -\frac{3}{10}$; questo pure diviso in due parti fra loro inverse, ne dà i due valori immaginari di y , l'uno $= -\frac{3}{20} - \sqrt{-\frac{391}{400}}$, l'altro $= -\frac{3}{20} + \sqrt{-\frac{391}{400}}$.

Sia $n = 7$, farassi la formola $y^6 + 1 - qy^5 + 1 - qy^4 + 1 - qy^3 + 1 - qy^2 + 1 - qy + 1 = 0$, che ridurrassi al terzo grado, dicendo a la somma dei due valori reali di y positivi, e fra loro inversi, e dicendosi le ambigue $\dots b, \dots c$ uguali alle somme degli altri presi a due a due, sempre tra loro inversi, avranno con ciò le tre equazioni componenti $y^2 - ay + 1 = 0$, $y^2 \dots by + 1 = 0$, $y^2 \dots cy + 1 = 0$, le quali fra loro moltiplicate danno l'equazione

$$\left. \begin{array}{l} y^6 - ay^5 + 3y^4 - 2ay^3 + 3y^2 - ay + 1 \\ \dots b \dots ab \dots 2b \dots ab \dots b \\ \dots b \dots ac \dots 2c \dots ac \dots c \\ \dots bc \dots abc \dots bc \end{array} \right\} = 0.$$

simile alla formola $y^6 + 1 - qy^5 + 1 - qy^4 + 1 - qy^3 + 1 - qy^2 + 1 - qy + 1 = 0$. Dal paragone delle quali ricavasi $1^\circ - a \dots b \dots c = 1 - q$, dunque $\dots b \dots c$ è una quantità reale; $2^\circ \dots ab \dots ac \dots bc + 3 = 1 - q$, o sia $\dots ab \dots ac \dots bc = -q - 2$, dunque la somma dei tre piani $\dots ab \dots ac \dots bc$ avrà innanzi di sé il segno proprio $-$; $3^\circ - 2a \dots 2b \dots 2c \dots abc = 1 - q$, e quindi $1 - q \dots abc = 0$, dunque il solido abc avrà avanti di sé il segno $-$; ma il di lui lato a è positivo, dunque il piano bc sarà negativo, il che non può farsi altrimenti, se non che l'uno dei lati come b sia positivo, e l'altro c

sia negativo; quindi la prima di queste equazioni farà $-a - b + c = 1 - q$; la seconda farà $ab - ac - bc = -q - 2$; la terza $-abc = 1 - q$. Sono pertanto da ritrovarsi tre quantità, la somma delle quali sia $= q - 1$, la somma dei tre piani fatti da due a due sia $= -q - 2$, il solido sotto a tutte tre sia $= q - 1$. Il che è un problema costitutivo di una equazione cubica. Di modo che designandosi per x ciascuna di esse tre quantità, avranno le equazioni semplici $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, dalla moltiplicazione delle quali ne nasce

$$\left. \begin{array}{r} x^3 - ax^2 - acx + abc \\ -b - bc \\ +c + ab \end{array} \right\} = 0.$$

O sia $x^3 + 1 - qx^2 - 2 - qx + q - 1 = 0$; le tre radici della quale sono reali, per il che anche

b , e c sono piani reali. Ponendosi $q = 3 + \frac{4}{363}$, farà il maggior valore positivo di x , cioè di $a = 3 \frac{1}{3}$; il minor valore positivo di x farà $= -\frac{80}{121} + \sqrt{\frac{15233}{14641}}$, e il va-

lore negativo di x , cioè di c , farà $= -\frac{80}{121} - \sqrt{\frac{15233}{14641}}$;

ma ciascuno di questi due valori di x è minore del 2, dunque i rimanenti quattro valori di y sono immaginari, perchè niun numero minore del 2, può dividerli in due parti reali, che fra di loro moltiplicate diano un prodotto $= 1$ per la 5.^a del 2.^o di Euclide.

Sia $n = 8$, e però la formola $y^8 - qy^7 + y^6 - qy^5 + y^4 - qy^3 + 1 = 0$, che ridurrassi ancora al terzo grado, se a rappresenti la somma dei due valori reali positivi, e fra loro inversi di y , e le ambigue . . . b , . . . c rappresentino le somme d'ogni due degli altri, e fra di loro inversi, e si fingano le tre equazioni $y^3 - ay + 1 = 0$,

$y^4 \dots by + 1 = 0$, $y^4 \dots cy + 1 = 0$. Queste fra loro moltiplicate danno fra loro l'equazione

$$\left. \begin{array}{ccccccc} y^4 - ay^3 + 3y^2 - 2ay + 3y^2 - ay + 1 \\ \dots b & \dots ab & \dots 2b & \dots ab & \dots b \\ \dots c & \dots ac & \dots 2c & \dots ac & \dots c \\ & \dots bc & \dots abc & \dots bc \end{array} \right\} = 0$$

simile alla formola $y^4 - qy^3 + y^2 - qy + y^2 - qy + 1 = 0$. Dal paragone dei secondi termini ricavasi $-a \dots b \dots c = -q$; ma a , b e c sono quantità reali, dunque la somma ambigua $\dots b \dots c$ è anche quantità reale; il paragone dei terzi termini dà $\dots ab \dots ac \dots bc + 3 = 1$, o sia $\dots ab \dots ac \dots bc = -2$; dunque la somma dei tre piani ab , ac , bc avrà il suo proprio segno $-$. 3° Il paragone dei quarti termini dona $-2a \dots 2b \dots 2c \dots abc = -q$; dunque farà $\dots ab - q = 0$, cioè abc sotto al segno opposto avrà il segno $+$, e perciò è negativo; ma il di lui lato a è positivo; dunque il piano bc è negativo, il che non può farsi, se non che i lati b , e c abbiano segni contrarii; dunque se b sia positivo, farà c negativo, dunque la prima di queste equazioni coi segni proprii, farà $-a - b + c = -q$; la seconda farà $ab - ac - bc = -2$; la terza $-abc = -q$.

Sono pertanto da ritrovarsi tre quantità, la somma delle quali sia $= q$, il prodotto da ogni due $= -2$; il prodotto dalle tre insieme $= -q$; il che fa un problema costitutivo di una equazione cubica. Imperciocchè, se ciascuna delle indeterminate a , b , c venga designata per x , cosicchè si formino le equazioni semplici $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, dalla moltiplicazione di queste ne nasce l'equazione cubica $x^3 - ax^2 + abx + abc$

$$\left. \begin{array}{cc} -b & -ac \\ +c & -bc \end{array} \right\} = 0,$$

o pure $x^3 - qx^2 - 2x + q = 0$, che ha tre radici reali, onde ciascuna delle b , c sia quantità reale. Sia $q = \frac{85}{42}$,

farà il maggior valore positivo di x , cioè di $a = \frac{5}{2}$, e quindi i valori reali, positivi, e reciproci di y faranno 2, e $\frac{1}{2}$; il minor valore positivo di x , cioè di b farà $= -\frac{5}{21} + \sqrt{\frac{382}{441}}$, ed il maggiore negativo di x , cioè di c ,

farà $= -\frac{5}{21} - \sqrt{\frac{382}{441}}$; ma ciascuno di questi due valori

di x è minore del 1; dunque gli altri quattro valori di y sono imaginarii.

Nella stessa maniera qualunque formola di caso dispari, e del caso pari prossimamente seguente, potrà ridursi al grado indicato dalla metà dell'indice del caso pari.

COROLLARIO.

- 6 **E**ssendo $a + b \times y^2 - y^{n-1} + y - 1 = a \times y^{n-1}$, farà $a + b : a :: y^2 - 1 : y^2 - y^{n-1} + y - 1$; e per conversion di ragione, $a + b : b :: y^2 - 1 : y^{n-1} - y$, cioè la somma di tutta una progressione geometrica alla somma di tutti i termini di mezzo, sta, come in una simile progressione accresciuta di un termine, la differenza dei termini estremi alla differenza dei termini secondo, e penultimo; onde sia la stessa cosa a dividerli la somma di una progressione per la somma di tutti i termini di mezzo, che a dividerli, in una simile serie accresciuta di un termine, la differenza dei termini estremi per la differenza del secondo, e penultimo termine.

Dunque data la somma degli estremi, e di tutti i termini di mezzo, o pure data la differenza degli estremi, e la differenza del secondo termine, ed il penultimo, ed il numero dei termini n , potrà sempre ritrovarsi il denominatore della ragione y ; perchè chiamandosi a la somma, o la differenza degli estremi, b la somma di tutti i termini di mezzo, o

pure la differenza tra il secondo, e l' penultimo termine ;
facendosi $\frac{a. + b}{b} = q$, avrassi nell' uno, e nell' altro caso la
formola generale $y^m - qy^{m-1} + qy - 1 = 0$.

OSSERVAZIONE.

- 7 Quantunque la regola di Giorgio Campbell (*transf. filosof. di Londra*) per determinare il numero delle radici reali, od immaginarie in una data equazione sia più esatta di quella già proposta senza dimostrazione dal Newton. Con tutto ciò essa trovasi ancora mancante, se venga applicata ad equazioni dell' indole delle precedenti. Il che apparirà chiaramente da quanto segue.

La regola è questa. Prendansi i numeri coefficienti dei termini di mezzo componenti quella potestà di una radice binomia del grado stesso, che la data equazione; ciascuno di cotai numeri diminuito dell' unità si faccia numeratore di una frazione, il cui denominatore sia lo stesso numero coefficiente raddoppiato. Sopra ciascun de' termini intermedi della data equazione scrivasi la sua corrispondente frazione, per cui dovrà moltiplicarsi il quadrato del coefficiente del sottoposto termine.

Ogniquale volta il prodotto del quadrato del coefficiente di un termine moltiplicato nella soprascritta frazione, troverassi maggiore del prodotto fatto dai coefficienti dei termini laterali, alternativamente diminuito, ed accresciuto dai prodotti dei coefficienti de' termini susseguenti; allora tutte le radici della proposta equazione saranno reali. Altrimenti ve ne saranno delle immaginarie.

Per esempio, se la proposta equazione fosse $x^4 \dots p x^3 \dots q x^2 \dots r x \dots s = 0$. I numeri coefficienti dei termini di mezzo componenti la quarta potestà di un binomio, sono 4, 6, 4; quindi le frazioni da scriversi sopra

i termini dell'equazione faranno $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$; cioè

$$x^4 \dots p x^3 \dots q x^2 \dots r x \dots s = 0.$$

E quindi tutte reali faranno le radici di questa equazione,

$$\text{se sia } \frac{3}{8} p^2 > q, \frac{5}{12} q^2 > pr - s, \frac{3}{8} r^2 > ps.$$

Nella stessa maniera, se fosse l'equazione $x^5 \dots p x^4 \dots q x^3 \dots r x^2 \dots s x \dots t = 0$. I numeri coefficienti dei termini componenti la quinta potestà di un binomio sono 5, 10, 10, 5; e perciò le frazioni da scriversi

sopra i termini dell'equazione, faranno $\frac{2}{5}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{2}{5}$;

$$\text{così } \frac{2}{5} \quad \frac{9}{20} \quad \frac{9}{20} \quad \frac{2}{5}$$

$x^5 \dots p x^4 \dots q x^3 \dots r x^2 \dots s x \dots t = 0$; ove, affinchè siano tutte reali le radici della proposta equazione, dovrà es-

serre $\frac{2}{5} p^2 > q$; $\frac{9}{20} q^2 > pr - s$, $\frac{9}{20} r^2 > qs - pt$, e

$$\frac{2}{5} s^2 > rt.$$

Così pure nella equazione $x^6 \dots p x^5 \dots q x^4 \dots r x^3 \dots s x^2 \dots t x \dots u = 0$, i numeri coefficienti dei termini componenti la sesta potestà di un binomio, essendo

6, 15, 10, 15, 6, le frazioni faranno $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{19}{40}$,

$\frac{7}{15}$, $\frac{5}{12}$, ed acciò sieno tutte reali le radici di essa equa-

144
zione, dovrà essere $\frac{5}{12} p^2 > q$, $\frac{7}{15} q^2 > pr - 5$, $\frac{19}{40} r^2$

$$> q5 - pt + u, \quad \frac{7}{15} s^2 > rt - qu, \quad \frac{5}{12} t^2 > su.$$

Ma per determinare il numero delle reali, e delle immaginarie: scriverassi il segno + sotto al primo, e sotto all'ultimo termine della data equazione, e lo stesso segno pure scriverassi sotto a quel termine, in cui adempiesi la sua condizione, e sotto agli altri noterassi il segno —, dopo il che tante radici reali avrà la data equazione, quante saranno le continuazioni di un medesimo segno, e tante saranno le immaginarie, quante saranno le variazioni de' segni: così per esempio nell'equazione $x^6 \dots p x^5 \dots q x^4 \dots r x^3 \dots s x^2 \dots t x \dots u = 0$,

+ + — + — + +

avendosi due continuazioni del segno +, vi faranno due radici reali, ed avendosi quattro variazioni de' segni + e —, vi si troveranno quattro radici immaginarie.

Ora, secondo questa regola, qualunque caso dispari del precedente problema sarebbe sempre possibile: poichè nelle formole dei casi dispari, tutti i termini di mezzo hanno lo stesso coefficiente negativo $1 - q$, quindi qualunque parte

del quadrato $1 - q$ essendo positiva, sarà sempre maggiore del prodotto negativo $1 - q$, fatto dai coefficienti 1 , e $1 - q$ del primo, e terzo termine; e la stessa parte di

quadrato sarà pure sempre maggiore del prodotto $1 - q$ dai coefficienti dell'ultimo, e dell'antipenultimo termine. Dunque sotto al secondo, e sotto al penultimo termine dovrà porsi il segno +, con che avrannosi sempre due continuazioni del segno +, le quali, giusta detta regola ne indicano due radici reali, e quindi la possibilità del caso.

Per altra parte è manifesto, che tali potrebbero supporfi le somme degli estremi, dei medii, e tale il numero dei termini

termini n , onde non poterli formare veruna progressione geometrica, composta di termini reali. Dunque in tal caso la regola troverassi mancante.

Veniamo alla speranza. Se nella formola $y^4 + 1 - qy^3 + 1 - qy^2 + 1 - qy + 1 = 0$, si ponga $q = \frac{5}{4}$, farassi $\frac{3}{8} \times \frac{1}{1 - q}$, cioè $+\frac{3}{128}$ maggiore di $1 - q$, o sia di $-\frac{1}{4}$.

Dunque sotto al secondo, e quarto termine dovrà porsi il segno $+$, e si avranno nella equazione due continuazioni del medesimo segno $+$, indicanti due valori reali di y , mentre essi sono tutti immaginari.

In fatti l'equazione $y^4 + 1 - qy^3 + 1 - qy^2 + 1 - qy + 1$, riducesi a questa $(n. 5)$; $x^4 + 1 - qx^3 - qx^2 - qx + 1 = 0$, o sia $x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 1 = 0$, dalla quale ricavasi $x = \frac{1}{8} + \sqrt{\frac{145}{64}}$, e $x = +\frac{1}{8} - \sqrt{\frac{145}{64}}$. Ma ciascuno di questi valori essendo minore del 1, niuno di essi può dividersi in due parti reali, dalla moltiplicazione delle quali ne risulti un prodotto $= 1$, mentre il massimo prodotto reale, che dalle due parti reali di una data quantità reale fare si possa, è uguale alla quarta parte del quadrato della quantità intera.

Lo stesso accade nella formola del caso pari $y^4 - qy^3 + y^2 - qy + 1 = 0$, se pongasi $q = \frac{4}{3}$. Imperciocchè $\frac{3}{8} q^2$, o sia $\frac{2}{3}$, è minore di 1 prodotto dai coefficienti del primo, e terzo termine; siccome ancora del prodotto dai coefficienti del terzo, e dell'ultimo termine.

Dunque sotto al secondo, ed al quarto termine dovrà porfi il segno —; ma $\frac{5}{12}$ del quadrato fatto dal coefficiente 1 del terzo termine, cioè $\frac{5}{12}$ è minore di $q^2 - 1$, cioè di $\frac{7}{9}$; dunque sotto al terzo termine dovrà porfi ancora il segno —. Onde avrebbonfi due continuazioni del medesimo segno —, indicanti due valori reali di y ; e però la possibilità del caso.

Ma l'equazione $y^4 - qy^3 + y^2 - qy + 1 = 0$, riducendosi a questa (n. 5) $x^2 - qx - 1 = 0$, dalla

$$\text{quale ricavasi } x = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{13}{9}}, \text{ e } x = \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{13}{9}};$$

dove l'uno, e l'altro dei due valori di x essendo minore del 1, non può dividerfi in due parti reali, il prodotto delle quali sia = 1: dunque non ostante le due continuazioni del segno —, tutti i valori di y sono immaginari. Lo stesso potendo accadere in ogni altro caso pari, e dispari: dunque in codesta sorta di equazione è mancante la regola soprammentovata.

*Altra risoluzione del precedente problema proposto
sotto altra forma.*

PRima che giugnessi alla risoluzione generale di esso problema, avendo ritrovato un metodo di risolverlo in ciascun caso particolare, più faticoso in vero, ma assai fecondo di bellissime analogie, senza la notizia delle quali moltissimi problemi sarebbero forse irresolubili; perciò stimo ben fatto di farne vedere l'uso, e l'utilità in più casi, potendosi col lume di questi far passo ad altri.

Sia a la data somma degli estremi, b la somma di tutti i termini medii, ed n il numero dei termini di una progres-

fione geometrica , di cui si voglia trovare ciascun termine. 147.

C A S O P R I M O .

Sia $n = 3$; il primo termine dicendoci x farà $a - x$ il terzo ; e quindi farà $x : b :: b : a - x$, ed $ax - xx = b^2$, o pure $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Altrimenti, dicendosi y la differenza degli estremi, farà $\frac{a+y}{2}$ il maggiore, ed $\frac{a-y}{2}$ il minor estremo, cosicchè

$$\frac{a+y}{2} : b :: b : \frac{a-y}{2}; \text{ onde ricavasi } \frac{a^2 - y^2}{4} = b^2, \text{ o pure}$$

$y^2 = a^2 - 4b^2$. Risolvendo questa equazione in proporzione, si ha $a + 2b : y :: y : a - 2b$.

C O R O L L A R I O .

Quindi la somma degli estremi, accresciuta del doppio termine di mezzo, sta alla differenza degli estremi, come la stessa differenza sta alla differenza tra la somma degli estremi, ed il doppio termine di mezzo, o pure il quadrato di una quantità binomia, la differenza dei quadrati, ed il quadrato della differenza dei due nomi, sono tre quantità proporzionali: così essendo $3, 6, 12$, farà ancora $27, 9, 3$; e se la quantità binomia sia $2 + 3$, farà $25, 5, 1$.

C A S O 2.º

Sia $n = 4$: dicendosi x il primo termine, y il secondo, farà $b - y$ il terzo, ed $a - x$ il quarto, onde abbiassi $x : y : b - y : a - x$. Dal che si ha primo, $y^2 = bx - xy$, secondo $b^2 - 2by + y^2 = ay - xy$, terzo $by - yy = ax - xx$. Sottrando la prima di queste dalla seconda, rimane $b^2 - 2by = ay - bx$, o pure

T 2

$b^2 + bx = ay + 2by$; e quindi $y = \frac{b^2 + bx}{a + 2b}$, e ancora $x = \frac{ay + 2by - b^2}{b}$.

Se nella terza di queste equazioni $by - yy = ax - xx$, in luogo di y si ponga il suo valore dato per x , cioè $\frac{b^2 + bx}{a + 2b}$, trovasi in fine $x^2 - ax \frac{+ b^2}{a + 3b} = 0$, e se in vece di y si sostituiscia il suo valore dato per y , trovasi $y^2 - ay \frac{+ b^2}{a + 3b} = 0$.

COROLLARIO PRIM^o.

Poichè $y^2 - ay \frac{+ b^2}{a + 3b} = 0$, farà pure $b^2 = (y^2 -$

$ay) \times \frac{+ b^2}{a + 3b}$, cioè il cubo dei due termini medii b^2 è uguale al parallelepipedo rettangolo, fatto dal piano dei due medii $ax - x^2$, o pure $by - y^2$, e dalla somma $a + 3b$ dei quattro termini, accresciuta del doppio dei termini medii.

COROLLARIO 2.^o

E poichè $\frac{d^2 + d^2 + d + 1}{d^2 + d} = \frac{d^2 + 1}{d}$: a ragione che

moltiplicando per i denominatori, fatti dalle due parti lo stesso prodotto $d^2 + d^2 + d^2 + d$, farà la somma di quattro continui proporzionali alla somma dei due medii, come la somma degli estremi al medio, nella serie di tre similmente proporzionali.

Se in questo problema si chiami x la differenza degli estremi, e y la differenza dei medii; li quattro termini con-

tinui proporzionali potranno esprimersi per $\therefore \frac{a+x}{2} : \frac{b+y}{2}$
 $: \frac{b-y}{2} : \frac{a-y}{2}$, onde si abbia $b^2 + 2by + y^2 = ab$
 $+ by$, $b^2 - 2by + y^2 = ab - bx + ay - xy$,
 $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$; sottrando la seconda dalla prima di
 queste, rimane $4by = 2bx - 2ay$; ed ancora $bx =$
 $\overline{a+2b} \times y$, e quindi $y = \frac{bx}{a+2b}$, e $x = \frac{\overline{a+2b} \times y}{b}$. Se

nella terza in luogo di x^2 pongasi $\frac{\overline{a+2b} \times y^2}{b^2}$, trovasi y^2
 $= b^2 - \frac{4b^3}{a+3b}$; e se in vece di y^2 si ponga $\frac{b^2 x^2}{a+2b}$, tro-
 vasi $x^2 = a^2 - \frac{4b^3}{a+3b}$, cioè nell' uno, e nell' altro modo

hassì una equazione pura di secondo grado da risolvere. Da
 queste cose possono ricavarfi molte belle, ed utili analogie;
 ma o perchè già sono note, o perchè facilmente possono ri-
 trovarfi, per brevità le tralascio.

C A S O 3.º

Sia $n = 5$. Ponendosi li tre termini di mezzo essere x ,
 y , z , li cinque faranno $\therefore \frac{x^2}{y} : x : y : z : \frac{z^2}{y}$; farà dun-
 que $\frac{x^2+z^2}{y} = a$, o pure $x^2 + z^2 = a y$; farà ancora x
 $+ y + z = b$; e quindi $x^2 + 2xy + y^2 + 2xz +$
 $2yz + z^2 = b^2$; ma $y^2 = xz$, e $2xy + 2zy = 2x + 2z \times y$,
 ed in oltre $x+z = b-y$, e perciò $2xy + 2zy = 2by$

— $2xy$. Dunque, se nel quadrato del trinomio $x + y + z$, in luogo di $x^2 + z^2$, scrivasi xy , ed in luogo di $y^2 + 2xz$, scrivasi $3y^2$, ed in luogo di $2xy + 2zy$, scrivasi $2by - 2y^2$, esso quadrato farassi $ay + 3y^2 + 2by$

— $2y^2$, o sia $y^2 + a + 2b \times y = b^2$.

Ma conosciuto il termine di mezzo y , e la somma dei tre b , si conoscono il primo, e terzo di essi per il caso primo, e quindi si conosceranno ancora il primo, e'l quinto, cioè gli estremi dei ricercati.

COROLLARIO PRIMO.

Risolviendo in proporzione l'equazione $y^2 + a + 2bxy = b^2$, si trova $\therefore a + 2b + y :: b : y$, cioè la somma dei cinque termini continui proporzionali accresciuta dei tre medii, e del medio, sta alla somma dei tre medii, come questa al termine di mezzo.

Siano $\therefore 1, 2, 4, 8, 16$, sarà $\therefore 49 : 14 : 4$.

COROLLARIO 1.º

Nella medesima equazione trasponendosi y^2 , si fa $a + 2b \times y = b^2 - y^2$, che risolta in proporzione ci dà $a + 2b : b + y :: b - y : y$, cioè la somma dei cinque accresciuta dei tre medii alla somma dei tre medii accresciuta del medio, sta, come la somma del terzo, e quarto termine a quello di mezzo. Essendo $\therefore 1, 2, 4, 8, 16$, sarà ancora $45 : 18 :: 10 : 4$.

COROLLARIO 3.º

La ragione di $b - y$ al y essendo quella degli estremi al termine di mezzo, nella serie di tre termini, e questa (Corol. 1. del caso 1.) essendo uguale alla ragione della somma dei quattro alla somma dei due medii; sarà dunque la

²⁵¹
 somma dei cinque, accresciuta dei tre medii alla somma dei
 tre medii accresciuta del medio, come la somma dei quat-
 tro alla somma dei due medii, nella stessa ragione conti-
 nuamente proporzionali sieno $\div 1. 2. 4. 8. 16.$, farà $45 : 18$
 $\div 15 : 6 \div 30 : 12.$

C O R O L L A R I O 4.^o

Dunque in una serie di continui proporzionali, la somma
 di cinque termini successivi accresciuta dei tre medii alla
 somma dei tre medii accresciuta del medio; sta come la
 somma di quattro successivi alla somma dei due medii, ed
 ancora come la somma del primo, e terzo al medio di tre
 termini successivi.

C A S O 4.^o

Sia $n = 6$, e sieno $\therefore \frac{u^2}{x} u : x : y : z : \frac{z^2}{y}$. Li sei

continui proporzionali; farà $\frac{u^2}{x} + \frac{z^2}{y} = a$, ed $u + x$

$+ y + z = b$, ed ancora $uy = x^2$, $uz = xy$, $y^2 = xz$.
 Sostituendo questi valori di x^2 , di uz , e di y^2 nel
 quadrato del quadrimomio $u + x + y + z$, cioè nel qua-
 drato $u^2 + 2ux + 2uy + x^2 + 2xy + 2uz + 2xz$
 $+ y^2 + 2yz + z^2 = b^2$, questo si farà $u^2 + 2ux +$
 $3uy + uxy + 3xz + 2yz + z^2 = b^2$, e perchè an-

cora $\frac{u^2}{x} = \frac{ux}{y}$, farà $\frac{ux + z^2}{y} = a$, ed $ux + z^2 = ay$,

e così ancora $u^2 + yz = ax$, e perciò $u^2 + ux + yz$
 $+ z^2 = a \times \overline{x + y}$, ed il rimanente di esso quadrato ux

$+ 3uy + 4xy + 3xz + yz = \overline{u + 2x + 2y + z} \times \overline{x + y}.$

Pongasi ora $q = x + y$, e farà $u + z = b - q$, ed
 $u^2 + ux + yz + z^2 = aq$, ed $ux + 3uy + 4xy$

$+ 3xz + yz = \overline{b+q} \times q = bq + q^2$. Dunque il qua-

drato del quadrimomio farà $= q^2 + \overline{a+b} \times q = b^2$, on-
 de conoscerassi q , somma dei due termini di mezzo; ma si
 conosce b somma dei quattro termini di mezzo, dunque effi
 quattro termini di mezzo si conosceranno per il caso secon-
 do; e quindi ancora il primo, e l'ultimo dei sei.

COROLLARIO PRIMO.

Poichè $q^2 + \overline{a+b} \times q = b^2$, risolvendo questa equazione
 in proporzione, si ha $a + b + q : b :: b : q$, cioè la
 somma di sei termini continui proporzionali, accresciuta dei
 due di mezzo alla somma dei quattro medii, sta come que-
 sta alla somma dei due medii. Sieno $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16$
 $: 32$, avrassi $\therefore 75 : 30 : 12$.

COROLLARIO 2.º

E perchè ancora $\overline{a+b} \times q = b^2 - q^2$, farà ancora
 $a + b : b + q : b - q : q$, cioè la somma di sei termini
 alla somma dei quattro medii, accresciuta dei due medii,
 starà come la somma del secondo, e quinto alla somma dei
 due termini di mezzo.

Sieno $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32$, farà ancora $63 : 42$
 $: : 18 : 12$.

COROLLARIO 3.º

Essendo $a + b : b + q :: b - q : q$, componendo fa-
 rà $a + 2b + q : b + q :: b : q$, cioè la somma di sei
 termini accresciuta dei quattro di mezzo, e dei due di mez-
 zo, starà alla somma dei quattro di mezzo, accresciuta dei
 due

due medii, come li quattro medii ai due di mezzo. Se tieno $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32$, farà $105 : 42 :: 45 : 18$.

COROLLARIO 4.º

Ma la ragione di b al q è quella dei quattro ai due di mezzo. Dunque in una serie di continui proporzionali, sono uguali le proporzioni dei due eitremiti a quel di mezzo; dei quattro ai due di mezzo; della somma dei cinque accresciuta dei tre medii alla somma dei tre accresciuta del medio; e della somma dei sei accresciuta dei quattro e più dei due medii, alla somma dei quattro accresciuta dei due medii.

CASO 5.

Sia $n = 7$. Pongasi li sette termini essere $\therefore \frac{t^2}{u} : t : u : x : y : z : \frac{z^2}{y}$, farà dunque $\frac{t^2}{u} + \frac{z^2}{y} = a$, e $t + u + x + y + z = b$.

Sarà pure $u^2 = tx$, $ux = ty$, $uy = tz$, $xy = uz$, $y^2 = xz$; quindi il quadrato del quinquinomio faraffi $t^2 + 2tu + 3tx + 4ty + 5tz + 4uz + 3xz + 2yz + z^2 = b^2$; ed essendo $\frac{xz}{u} = \frac{z^2}{y}$, farà ancora $\frac{t^2 + xz}{u} = a$, e $t^2 + xz = au$, così pure farà $z^2 + tx = ay$,

$t^2 + 2tu + tx + xx + 2yz + z^2 = a \times u + 2x + y$, che sottratto dal quadrato del quinquinomio, rimane $2tx +$

$$4ty + 5tz + 4uz + 2xz = 2t + 4u + 5x + 4y + 2z \times x.$$

Dican ora $p = u + x + y$, e farà $t^2 + 2tu + tx + 2z + 2yz + z^2 = ap + ax$, e $2tx + 4ty +$

$5tz + 4uz + 2xz = 2b + 2p + x \times x$; e quindi tutto il quadrato del quinquinomio farà (1.ª equazione) $x^2 +$

$ax + 2bx + 2px + ap = b^2$, in cui vi sono ancora due incognite x , e p .

Dal quadrato del quinquinomio sottraendo $t^2 + tu + tx + xz + yz + z^2 = ap$, farà il rimanente $tu + 2tx$

$$+ 4ty + 5tz + 4uz + 2xz + yz = \overline{t+u+x+y+z}$$

$\times \overline{x+y+z}$, $+ x \times \overline{x+y+z} = bp + px$; quindi tutto il quadrato farassi ancora (2^a equazione) $xx + px + bp + ap = b^2$.

Dallo stesso quadrato sottraendo $pp + ap = u^2 + 2ux + 2xy + y^2 + t^2 + tu + tx + xz + yz + z^2$, rimarrà $tu + tx + 2ty + 2tz + 2uz + xz + yz$

$= \overline{u+y} \times \overline{t+u+x+y+z} = bp - bx$. Dunque tutto esso quadrato farà pure $= pp + a + bp - bx = b^2$ (terza equazione). Sottraendo dallo stesso quadrato il valore di $pp + ap + ap + ap$, rimane $u^2 + 2ux + 2xx + 2xy + y^2$;

ma $\frac{u^2+y^2}{x} = t + z = b - p$; dunque $u^2 + y^2 = bx$

$- px$, e $2ux + 2xx + 2xy = 2px$; e quindi di nuovo tutto il quadrato diventa (4^a equazione) $= p^2 + ap + ax + bx + px = b^2$; ora, se nella equazione del terzo caso, ove era $= x^2 + a + 2b \times x = b^2$, in luogo di a scrivi $b - p$, e p in luogo di b , avrassi (5^a equazione)

$x^2 + b + p \times x = p^2$. Sottraendo la seconda di queste equazioni $x^2 + px + bp + ap = b^2$ dalla prima $x^2 + ax + 2bx + 2px + ap = b^2$, rimane ax

$+ 2bx + px - bp = 0$; cioè $a + 2b + p \times x = bp$,

onde ricavasi $x = \frac{bp}{a+2b+p}$; ma $ax + 2bx = bp - px$;

onde ricavasi $p = \frac{b^2 - x^2}{a + b + x}$.

Dalla seconda $x^2 + px + bp + ap = b^2$ sottraendo la quinta $x^2 + px + bx = p^2$, rimane $bp + ap - bx = b^2 - p^2$, onde $bx = bp + ap + p^2 - b^2$, ed $x = \frac{p^2 + a + b \times p - b^2}{b}$.

Sottraendo la stessa quinta $x^2 + px + bx = p^2$ dalla prima $x^2 + ax + 2bx + 2px + ap = b^2$, rimane $ax + bx + px + ap = b^2 - p^2$, o pure $ax + bx + px = b^2 - p^2 - ap$; quindi $x = \frac{b^2 - p^2 - ap}{a + b + p}$.

In fomigliante maniera possono trovarsi altri valori di x , e di p , i quali però in fine ci danno sempre le equazioni $+x^2 - a - 3b \times x^2 - a^2 - 3ab - 3b^2 \times x + b^2 = 0$, e $p^2 + 2a + 3b \times p^2 - a^2 - 3ab \times p - ab^2 - 2b^2 = 0$.

Così, per esempio, perchè $p = \frac{ax + 2bx}{b - x}$, e $p = \frac{b^2 - x^2}{a + b + x}$, onde sia $\frac{ax + 2bx}{b - x} = \frac{b^2 - x^2}{a + b + x}$, togliendo le frazioni, ed ordinando l'equazione, trovasi la prima al termine di mezzo x , $x^2 - a - 3b \times x^2 - a^2 - 3ab - 3b^2 \times x + b^2 = 0$.

Similmente avendosi $x = \frac{bp}{a + 2b + p}$, ed $x = \frac{b^2 - p^2 - ap}{a + b + p}$, onde sia $\frac{bp}{a + 2b + p} = \frac{b^2 - p^2 - ap}{a + b + p}$, trovasi la seconda

V₂

equazione alla somma p dei tre medii, $p^2 + \sqrt{1a + 3b}$

$$\times p^2 - \sqrt{a^2 - 3ab} \times p - ab^2 - 1b^2 = 0.$$

In ambedue sono reali tutte le radici, come apparisce dai segni, cioè due positive, ed una negativa nella prima, ed all'opposto una positiva, e due negative nella seconda.

Ritrovato il valore di x , è dato il valore di p , o pure trovato il valore di p si fa noto il valore di x , cioè si conoscerà la somma dei tre medii p , ed il medio x , con che, per il primo caso, si distinguono questi tre termini, e quindi gli altri quattro.

COROLLARIO PRIMO.

Se nella prima delle soprannotate equazioni $x^2 + \sqrt{a + 1b + 2p} \times x + ap = b^2$, aggiungasi da ambe le parti $pp + 1bp$,

farassi $\sqrt{a + 1b + p + x} \times p + x = \sqrt{b + p} \times \sqrt{b + p}$, che risolveresi nella proporzione $\therefore a + 1b + p + x : b + p :: b + x$; cioè la somma dei sette con i cinque, con i tre medii, come questa medesima alla somma dei tre medii col medio insieme. Così essendo $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, farà $\therefore 225 : 90 : 56$.

COROLLARIO 2°

La seconda di dette equazioni, $xx + px + bp + ap = b^2$, trasponendo xx , si fa $\sqrt{a + b + x} \times p = b^2 - x^2$, che si risolve nella proporzione $a + b + x : b + x :: b - x : p$, cioè la somma dei sette continui proporzionali insieme col medio, sta alla somma dei cinque medii col medio, come la somma del secondo, terzo, quinto, e sesto termine, sta alla somma dei tre medii. Così essendo $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, fatti $135 : 70 : 54 : 28$.

COROLLARIO 3.^o

157

Nella terza equazione $pp + \overline{a + b}p - bx = b^2$, trasportando bx , fassi $pp + \overline{a + b} \times p = b^2 + bx$, che si risolve in $a + b + p : b + x :: b : p$; cioè la somma dei sette con i tre medii alla somma dei cinque medii col medio, sta come la somma dei cinque, alla somma dei tre medii. Così essendo $\therefore 1 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, avrassi $155 : 70 :: 62 : 28$.

COROLLARIO 4.^o

Essendo $a + b + x : b + x :: b - x : p$, farà alternando $a + b + x : b - x :: b + x : p$; ma è altresì (*cor. antec.*) $a + b + p : b + x :: b : p$, ed alternando $a + b + p : b :: b + x : p$. Dunque farà $a + b + x : b - x :: a + b + p : b$, cioè la somma dei sette col medio alla somma del secondo, terzo, e quinto, e sesto termine, sta come la somma dei cinque medii con i tre medii alla somma dei cinque termini medii. Così essendo $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, farà $\therefore 135 : 54 :: 155 : 62$.

COROLLARIO 5.^o

Avendosi pure $\overline{a + 2b + p} \times x = pb$, farà ancora $a + 2b + p : p :: p : x$; cioè la somma dei sette con i cinque medii, e più li tre medii, sta alla somma dei cinque medii, come la somma dei tre medii al medio. Così essendo $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, fassi $217 : 62 :: 28 : 8$.

COROLLARIO 6.^o

Poichè $a + b + x : b - x :: a + b + p : b$, farà dividendo $a + 2x : b - x :: a + p : b$. cioè la somma dei due estremi insieme col doppio medio, sta alla som-

ma dei termini secondo, terzo, quinto, e sesto, come la somma dei sette accresciuta dei tre medii alla somma dei cinque medii, essendo $1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$, farà pure $81 : 54 : 93 : 62$.

C A S O 6.°

Sia $n = 8$, e gli otto termini esprimansi così $\frac{s^2}{t} : s : t : u : x : y : z : \frac{z^2}{y}$, farà $\frac{s^2}{t} + \frac{z^2}{y} = a$, e $s + t + u + x + y + z = b$.

Sarà pure $t^2 = su$, $tu = sx$, $sy = tx = u^2$, $ty = sz = ux$, $uy = tz = xx$, $xy = uz$; quindi il quadrato dei sei medii, farassi $s^2 + 2st + 3su + 4sx + 5sy + 6sz + 5tz + 4uz + 3xz + 2yz + z^2 = b^2$. In oltre sarà $\frac{z^2}{y} = \frac{uz}{t}$; quindi $s^2 + ux$, o pure $s^2 + xy = at$,

similmente $ts + xz$, o pure $ts + yy = au$; $t^2 + yz$, o pure $us + yz = ax$; $z^2 + sx$, o pure $z^2 + tu = ay$; quindi $s^2 + 2st + 2su + 2sx + 2xz + 2yz + z^2 = a \times x - t + 2u + 2x + y$.

Pongasi $t + u + x + y = p$, ed $u + x = q$, e tutti questi prodotti faranno $ap + aq$, ed il rimanente del quadrato, cioè $su + 3sx + 3sy + 6sz + 3uz$

+ xz , o sia $t + u + x + y \times t + 2u + 2x + y$, farà $= pp + pq$, cui aggiugnendo $ap + aq$, avrassi il

quadrato de' sei termini di mezzo (1.ª equaz.) $pp + a + qp + aq = b^2$

Dal quadrato del sestinomio levando tanto $u^2 + 2ux + x^2 = qq$, quanto $s^2 + st + su + sx + uz + xz + yz + z^2 = ap$, farassi il rimanente $st + 2su + 3sx + 4sy +$

4 s z + 4 t z + 3 u z + 2 x z + y z, cioè $\overline{s+t+u+x+y+z}$
 $\times \overline{t+u+x+y} = bp$; onde il medesimo quadrato divenga
 (2^a equaz.) $qq + \overline{a+b}q = b^2$, ed abbiassi ancora $\overline{a+b}$
 $\times p = b^2 - q^2$; e quindi $p = \frac{b^2 - q^2}{a+b}$.

Se nella equazione del terzo caso $qq + \overline{a+b}q = b^2$,
 scrivasi $b - p$ in luogo di a , e p in luogo di b , farassi q^2
 $+ bq = p^2$; e ponendo $q^2 + bq$ in luogo di p^2 nella pri-
 ma equazione $pp + \overline{a+q}p + aq = b^2$, avrassi quest'altra
 (3^a equaz.) $q^2 + \overline{a+b}q + \overline{a+q}p = b^2$.

In cui scrivendo in luogo di p il suo valore di sopra ri-
 trovato, $\frac{b^2 - q^2}{a+b}$, farassi $qq + \overline{a+b}q + \frac{ab^2 - aq^2 + bq^2 - q^3}{a+b}$
 $= b^2$, dove, moltiplicando per $a+b$, trovasi la prima equa-
 zione alla somma dei due medii q , cioè $q^3 - bq^2 - a^2 2ab - 2bbq$
 $+ b^3 = 0$.

Dalla seconda equazione $qq + \overline{a+b}p = b^2$ sottrando la
 terza $qq + bq = p^2$, rimane $\overline{a+b}p - bq = b^2 - q^2$,
 e quindi $\overline{a+b}p - b^2 + p^2 = bq$. Onde ricavasi $q =$
 $\frac{a+b p - b^2 + p^2}{b}$; sostituendo questo valore di q nella se-
 conda, o pure nella terza, ne dà una equazione alla somma
 dei due medii p , cioè $p^3 + \overline{2a+2b}p^2 + \overline{a^2+2ab-b^2}p$
 $- ab^2 - b^3 = 0$.

In ciascuna delle quali equazioni le tre radici sono reali, cioè due positive, ed una negativa nella prima, ed all'opposto due negative, ed una positiva nella seconda.

Trovato poi il valore di una delle due incognite p , q ; è dato il valore dell'altra; onde si conoscerà la somma dei due medii, con che si distingueranno i quattro termini per il caso secondo, e quindi si conosceranno ancora gli altri quattro.

Potendo queste cose bastantemente indicare la via da tenersi nei casi, dove sia n un numero maggiore dell'otto, non farò, che notare alcuni corollari.

COROLLARIO PRIMO.

Avendosi $q q + a + b p = b^2$, sarà ancora $a + b \times p = b^2 - q^2$, che risolta in proporzione dà $a + b : b + q :: b - q : p$, cioè la somma degli otto alla somma dei sei medii accresciuta dei due medii, ita come la somma del secondo, terzo, sesto, e settimo termine alla somma dei quattro medii. Essendo $:: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$, farà $255 : 150 :: 102 : 60$.

COROLLARIO 2.^o

L'equazione $pp + ap + pq + aq = b^2$, risolta in proporzione, dona $:: a + p : b : p + q$, cioè la somma degli estremi e dei quattro medii, la somma dei sei medii, la somma dei quattro medii insieme alli due di mezzo, sono tre somme proporzionali. Essendo $:: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$, farà $:: 189 : 126 : 84$.

COROLLARIO 3.^o

Sottrando l'equazione $q q + b p + a p = b^2$ dalla terza $q q + a q + b q + p q + a p = b^2$, rimane $a q + b q - p q = b p$; onde sia $a + b + p : b :: p : q$, cioè la
somma

somma degli otto insieme con li quattro medii, sta alla somma dei sei medii, come la somma dei quattro alla somma dei due medii. Essendo $\therefore 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$, sarà $\therefore 315 : 126 : 60 : 24$.

COROLLARIO 4.º

Ma come la somma dei quattro ai due di mezzo, così (*cor. 1. caso 1.*) la somma dei due estremi al medio, nella serie di tre termini, e così (*cor. 3. caso 3.*) la somma dei cinque con i tre medii alla somma dei tre accresciuta del medio, e così (*cor. 3. caso 4.*) la somma di sei accresciuta dei quattro medii, e dei due medii alla somma dei quattro medii accresciuta dei due medii, e così (*cor. 1. caso 5., e cor. 3. caso 3.*) la somma dei sette, più li cinque, più li tre medii, e più col medio alla somma dei cinque, più li tre medii; e così finalmente (*cor. 3. caso 6.*) la somma degli otto, più li quattro medii alla somma dei sei medii, se questi termini si prendano nella medesima, od in una simile progressione geometrica, e coll'ordine proposto.

Altri moltissimi possono ancor darsi forse ancora più importanti, che lascio alle diligenti ricerche degli studiosi in questo genere di cose, essendo certissimo, che moltissimi problemi senza cotali analogie, rimangono difficilissimi, ed eziandio insolubili. Solamente osservo 1º, che i numeri, o sia le moltitudini dei termini raccolti, fanno medesimamente una proporzione: così per esempio nel *cor. 3.* di questo caso le moltitudini de' termini sommati $12. 6., 4. 2.,$ fanno una proporzione; così nel *cor. 1.* del caso 5., le moltitudini dei termini $16. 8. 4.$ sono proporzionali, e lo stesso accade negli altri casi. Quindi quest'altra differenza trovasi tra le serie dei continuamente uguali, e dei continuamente proporzionali, che in quelle, se le moltitudini dei termini sommati sieno proporzionali, anche lo sieno le somme stesse fatte con qualunque ordine; ma in queste le somme dei termini deggiono farsi con un certo ordine, affinchè abbiano fra di

loro qualche proporzionalità. 1° Egli è poi ancora evidente, che tutte quelle cose, che negli elementi dimostransi delle proporzioni, di tre, e di quattro termini, continue, o disgiunte hanno luogo in queste somme proporzionali; e quindi poterli estendere le medesime senza limite, ma affine di porre in maggior lume l'utilità di queste proporzioni, foggierò alcuni problemi, dei quali cercherebbesi forse invano la risoluzione per altra via.

PROBLEMA 2.°

Data la somma a di cinque continui proporzionali, e dato il medio b , trovate li termini rimanenti.

Chiamisi x la somma dei tre medii, sarà (cor. 1. caso 5.) $a + b + x :: x : b$; e quindi $ab + bb + bx = x^2$, ed $x^2 - bx = ab + b^2$. Conosciuto x , trovansi gli altri termini per il primo caso del problema primo.

PROBLEMA 3.°

Data la somma a dei cinque continui proporzionali, e del medio, e data la somma b dei tre medii, trovare ciascun termine.

Chiamisi x il medio, sarà (cor. 1. caso 3.) $a + b : b :: b : x$; quindi $a + b \times x = b^2$, ed $x = \frac{b^2}{a + b}$, e conosciuto x , trovansi pure gli altri come sopra.

PROBLEMA 4.°

Data la somma a dei sei continui proporzionali, insieme coi due medii, e data la somma b dei quattro medii, trovare ciascun termine.

La somma dei due medii chiamisi x , avrassi (cor. 1. *caso* 4.)

$a : b :: b : x$, perciò $ax = b^2$, ed $x = \frac{b^2}{a}$; ma conosciuta la somma x dei due medii, e la somma b dei quattro medii, distinguonsi gli altri termini pel secondo caso.

PROBLEMA 5.^o

Data la somma di sei continui proporzionali, e la somma b dei quattro medii; distinguere essi termini.

Chiamisi x la somma dei due medii (cor. 1. *caso* 4.), ed avrassi $a + x : b - x :: b - x : x$; quindi $a + x + x x$

$$= b^2 - 2bx + xx, \text{ o pure } a + bx = b^2, \text{ ed } x = \frac{b^2}{a + b};$$

ma data la somma dei quattro, e la somma dei due medii, trovansi pure tutti gli altri termini come sopra.

PROBLEMA 6.^o

Data la somma a di sette continui proporzionali, la somma b dei cinque medii insieme coi tre medii; e dato il medio c , distinguere gli altri termini.

Chiamisi x la somma dei tre medii insieme col medio,

farà (cor. 1. *caso* 5.) $a + b + c : b :: b : x$; quindi $a + b + c$

$$xx = b^2, \text{ ed } x = \frac{bb}{a + b + c}, \text{ da cui sottrando il medio}$$

dato c , farà $\frac{bb}{a + b + c} - c$, la somma dei tre medii,

con che trovansi li termini rimanenti.

X 2

P R O B L E M A 7.º

Data la somma a dei sette continui proporzionali insieme col medio; la somma b dei cinque medii insieme col medio, e la somma c dei tre medii, distinguere essi termini.

Chiamisi x il medio, e sarà (cor. 2. cas. 5.) $a : b :: b - x : c$; quindi $ac = b^2 - bx$, o pure $bx = b^2 - ac$,

ed $x = \frac{b^2 - ac}{b}$. Conosciuto x , sottraggasi dalla somma c

dei tre, il rimanente sarà la somma del terzo, e quinto termine di mezzo, con che distinguonsi gli altri termini per il secondo caso.

P R O B L E M A 8.º

Data la somma a degli estremi di otto termini continui proporzionali, la somma b dei sei medii, e la somma c dei quattro, insieme coi due medii; distinguere i termini.

Chiamisi x la somma dei quattro medii, sarà (cor. 2. cas. 6.)

$a + x : b :: b : c$, quindi $ac + cx = b^2$, ed $x = \frac{b^2 - ac}{b}$;

ma conosciuta la somma dei quattro, e la somma dei sei, possono trovarsi tutti i termini per il terzo caso del problema primo, o pure, se da c si sottragga x , il rimanente sarà la somma dei due medii; con che pure conoscerassi il rimanente per il secondo caso.

P R O B L E M A 9.º

Data la somma a di otto continui proporzionali, la somma b dei sei insieme alli due medii, e data la somma c dei quattro medii; distinguere i termini.

Chiamisi x la somma del secondo, terzo, sesto, e settimo termine, e sarà (cor. 1. cas. 6.) $a : b :: x : c$; quindi

$bx = ac$, ed $x = \frac{ac}{b}$, sottrando questo valore di x dal-

la somma b , il rimanente farà la somma dei due medii, quali conosciuti, e conosciuta la somma c dei quattro, distinguonsi i termini pel secondo caso.

Codesti problemi, nei quali si hanno tre dati, non eccedono il secondo grado; ma quelli che appartengono al quinto, e sesto caso, se non abbianfi che due dati, montano al terzo grado, e quelli che al settimo, e all'ottavo caso, al quarto grado, quelli che al nono, e al decimo, montano al quinto grado ec., e le equazioni così ritrovate, hanno tutte le loro radici reali.

PROBLEMA 10.º

Data la somma a dei sette continui proporzionali, e dato il termine di mezzo b , trovare gli altri termini.

La somma dei cinque medii chiamati x , e la somma dei tre medii chiamati y , farà (*cor. 1. cas. 5.*) $a + x + y + b : x + y :: x + y : y + b$; quindi $ab + bb + bx + 2by + ay + xy + y^2 = x^2 + 2xy + yy$.

In oltre sarà ancora $a + b : x + b :: x - b : y$; e quindi $ay + by = x^2 - b^2$, e dividendo per $a + b$, trovasi y

$= \frac{x^2 - b^2}{a + b}$. Sostituendo questo valore di y nella precedente,

essa cambiasi in quest'altra, $x^2 - bx^2 - ab - 2b^2x - a^2b - ab^2 - b^3 = 0$. Ma conosciuta la somma dei cinque x , ed il termine medio b , trovanfi le altre cose pel caso terzo.

PROBLEMA 11.º

Data la somma degli estremi a , e dei due medii b , nella serie di otto continui proporzionali, distinguere i termini.

Chiamisi x la somma dei sei medii, e y la somma dei quattro medii, sarà (*cor. 1. cas. 6.*) $a + y : x :: x : y + b$, quindi $ay + by + yy + ab = xx$.

Sarà pure $a + x : x + b :: x - b : y$; quindi $ay + xy = x^2 - b^2$, ed $x^2 = ay + xy + b^2$, sottrando questa dalla precedente, rimane $by + yy - ab - xy - b^2 = 0$; divi-

dendo per y , trovasi $x = \frac{by + yy + ab - b^2}{y}$. Sosti-

tuendo questo valore di x nella precedente, ed ordinando l'equazione, trovasi in fine l'equazione $y^3 - by^2 - 2b^2y + ab^2 - b^3 = 0$. Conosciuta la somma y dei quattro, e la somma b dei due medii, distinguonsi i termini come sopra.

PROBLEMA 12.º

Data la somma a , il numero n dei continui proporzionali, e data la somma ab dei loro quadrati, trovare la serie dei lati continuamente proporzionali.

Poichè è data la ragione del quadrato a^2 della somma alla somma ab dei quadrati dei lati, e parimente data la ragione di $a^2 + ab : 2ab$, cioè di $a + b : 2b$; ma $a + b : 2b$ (*cor. del teor. princip.*), sta come una simile serie accresciuta di un termine alla somma degli estremi.

Dunque, se trovisi per il problema primo il denominatore della ragione in una serie di tanti termini, quanti ne esprime $n + 1$, la di cui somma sia $= a + b$, e la somma degli estremi $= 2b$, sarà pure lo stesso il denominatore nella serie dei lati; ma quando si ha il denominatore della ragione, il numero dei termini, e la somma di tutta la progressione, è dato qualunque termine della medesima per il seguente problema.

Data la somma di una progressione geometrica finita, o decrescente in infinito, e dato il denominatore della ragione: trovare qualunque termine assegnato della medesima.

Se la serie data consista di un numero finito di termini, qual sia n , ed il dato denominatore sia d : pigliansi tanti termini nella serie simile $1 : d : d^2 : d^3 : d^4$ ec., che l'ultimo di essi sia d^{n-1} , e se consisterà di un numero infinito di termini, si pigli la serie decrescente in infinito $1 :$

$\frac{1}{d} : \frac{1}{d^2} : \frac{1}{d^3} : \frac{1}{d^4}$ ec.; quindi dividasi la somma della

serie proposta per la somma, che può facilmente trovarsi, della simile serie assunta, e per il quoziente moltiplichisi quel termine della serie assunta, che corrisponde al termine assegnato della proposta: il prodotto sarà il termine ricercato. Il che è chiaro dalla definizione delle serie simili.

Ma avuto un dato termine col denominatore della ragione, trovansi gli altri tutti. Dunque ec.

OSSERVAZIONE.

Comechè codesto problema abbia dato motivo alla presente esercitazione: penso, che non sia per riuscire spiacevole al leggitore, il ritrovare qui annessa un'altra risoluzione particolare, e propria, quando il problema debba risolversi in numeri razionali.

La data frazione $\frac{a+b}{2b}$ riducasi ai minimi termini, ed

allora o il denominatore $2b$, o certamente alcun di lui moltiplice, minore della somma dei quadrati $a^2 + b^2$, sarà la somma di due numeri interi, ciascuno dei quali sarà una potenza perfetta di quel grado, che indicherà il numero n . Se con quelle due potestà formisi una frazione, da

cui estrarrafi la radice n , farà questa il denominatore ricercato della serie: di modo che, quando essa radice farà numero intero, una delle due potestà farà l'unità.

Questa risoluzione numerica fondaſi principalmente in due proposizioni.

L'una ſi è il teorema ſpeciale dei quadrati, ricavato da principio dal teorema generale per le potestà di ogni ordine: cioè la ſomma dei quadrati di tutta la ſerie, e di ogni termine, ſſa alla doppia ſomma dei quadrati di ogni termine, come la ſomma di tutti i termini alla ſomma degli eſtremi, in una ſimile ſerie accreſciuta di un termine.

L'altra è la ſeconda proposizione del lib. 8. di Euclide, in cui, quantunque non ſi parli, che di quadrati, e di cubi, nondimeno può eſtenderſi colla ſteſſa facilità ad ogni altro ordine di potestà. Cioè:

Se ſieno quanti numeri ſi vogliano continuamente proporzionali, e minori nella loro proporzione: ciaſcuno degli eſtremi farà una potestà perfetta di quell' ordine, che eſprime il numero de' termini, diminuito dell' unità.

Dunque $a^2 + ab$, o ſia $a + b$, ne rappresenta la ſomma di tutti i termini, e ab , o ſia ab , ne rappresenta la ſomma dei due eſtremi, in una progreſſione geometrica ſimile alla ricercata ma accreſciuta di un termine. Dunque trattandoſi di numeri razionali, e continuamente minori nella loro ragione, ſe

$\frac{a + b}{ab}$ riducaſi alla minor eſpreſſione in interi, farà ab , o

qualche ſuo multiplice la ſomma di due potestà del grado indicato dal numero n , quindi ſe con queſte due potestà ſi formi una frazione, da cui estrarrafi la radice indicata dal numero n la nuova frazione farà il denominatore della ragione ricercata; che ſe in vece di una frazione ſi aveſſe un numero intero, allora una delle potestà farà l'unità.

Eſempi,

169

*Esempi, quando il denominatore della ragione
è un numero intero.*

1.°

Sia 114. la somma di tre numeri proporzionali, e sia
9804. la somma dei loro quadrati.

In questo caso la frazione $\frac{a+b}{2b}$, ridotta ai minimi termini interi, trovasi $= \frac{57}{43}$. Il denominatore 43 preso otto volte faffi 344 = ai due cubi 343 + 1, con quali formifi la frazione $\frac{343}{1}$, la di cui radice cubica = 7 si è il denominatore ricercato; e quindi li tre numeri ricercati sono :: 2 : 14 : 98.

2.°

Sia 140 la somma di quattro numeri continuamente proporzionali, e sia 19520 la somma dei loro quadrati.

In questo caso la frazione $\frac{a+b}{2b}$ ridotta ai minimi termini, faffi $= \frac{121}{41}$, dove il 41 duplicato, cioè 82 è uguale ai due quadrato-quadrati 81 + 1; onde formafi la frazione $\frac{81}{1}$, la cui radice quarta $\frac{3}{1}$, cioè 3 è il ricercato denominatore; quindi li quattro numeri sono :: 6 : 18 : 54 : 162.

Y

Esempi, quando il denominatore è un numero rotto.

1.^o

Sia 37 la somma di tre numeri proporzionali, e sia 481 la somma de' loro quadrati.

Qui farassi $\frac{a+b}{2b}$ ridotto ai minimi termini $= \frac{35}{13}$; ma

il 13 non fassi uguale a due numeri cubi, se non moltiplicato per 7, cioè quando fassi $91 = 64 + 27$; onde la frazione sia $\frac{64}{27}$, la cui radice cubica $= \frac{4}{3}$ è l'esponente della ragione ricercata; e quindi li tre numeri sono $\therefore 9 : 12 : 16$.

2.^o

Sia 65 la somma di quattro numeri continuamente proporzionali, e sia 1265 la somma de' loro quadrati.

Qui farassi $\frac{a+b}{2b}$ ridotto ai minimi termini $= \frac{211}{97}$, ove

il denominatore 97 è uguale alla somma dei due quadrato-quadrati $81 + 16$; con quali formasi la frazione $\frac{81}{16}$, la cui radice quarta $\frac{3}{2}$ è l'esponente della ricercata ragione, e perciò li quattro numeri sono $\therefore 8 : 12 : 18 : 27$.

P R O B L E M A 14.^o

- 10 Data la somma a , l'uno dei due estremi b , ed il numero dei termini n , trovare l'esponente della ragione.

Sia b il minor estremo, e y il ricercato esponente, farà la serie tutta $= b + by + by^2$ ec. $\dots + by^{n-1} = a$, e dividendolo per b , farà $1 + y + y^2 +$ ec. $\dots + y^{n-1}$

$= \frac{a}{b}$, e moltiplicando per $y - 1$, avrassi in fine $y^n -$

$$\frac{ay}{b} + \frac{a-b}{b} = 0.$$

CASO 2.^o

Sia b il maggiore estremo: chiamisi x l'estremo minore, ed avrassi la serie $x + xy + xy^2 +$ ec. $\dots + xy^{n-1} = a$, ed $xy^{n-1} = b$; quindi $x + y + xy^2$ ec. $\dots + xy^{n-1}$

$= a - b$; ma $x = \frac{b}{y^{n-1}}$, ed $x = \frac{a-b}{y^{n-1} + y^{n-2} + \text{ec.} + y + 1}$.

Dunque $\frac{b}{y^{n-1}} = \frac{a-b}{y^{n-1} + y^{n-2} + \text{ec.} + y + 1}$. Multipli-

cando per i denominatori, avrassi $a - b \times y^{n-1} = b$

$\times y^{n-2} + y^{n-3} + \text{ec.} \dots + y + 1$, e moltiplicando ancora

per $y - 1$, farassi $a - b \times y^n - a + b = b y^{n-1} - b$;

e quindi $y^n - \frac{a}{a-b} y^{n-1} + \frac{b}{a-b} = 0$: o pure nel

primo caso, dicendosi a il minor estremo, e b la somma di

tutti i termini rimanenti, trovasi l'equazione $y^n - \frac{a-b}{a} \times y$

$+ \frac{b}{a} = 0$; e nel secondo caso, dicendosi a l'estremo

maggiore, trovasi l'equazione $y^a - \frac{a-b}{b} \times y^{a-1} + \frac{a}{b} = 0$.

COROLLARIO .

Poichè $\frac{a}{a}, \frac{b}{b} = 1$; ne segue, che in queste due for-

mole il coefficiente del termine di mezzo, preso positivamente supera l'ultimo termine per l'unità; e codeste equazioni composte di soli tre termini, cioè del primo, secondo, ed ultimo, o del primo, penultimo, ed ultimo, nelle quali il coefficiente del termine di mezzo negativo eccede l'ultimo termine positivo per la unità, possono sempre abbassarsi di una dimensione, poichè uno dei valori della in-

cognita è sempre $= 1$; cioè generalmente $x^a - \overline{q-1}$

$\times x^{a-1} + q = 0$; $x^a - \overline{q-1} \times x + q = 0$. Dividendosi per $x - 1 = 0$, riduconsi ad $x^{a-1} + x^{a-2} +$

$\dots - q = 0$, ed $x^{a-1} - \overline{q-1} \times x^{a-2} - \overline{q-1} \times x^{a-3} + \text{ec.} \dots - q = 0$.

Così l'equazione $x^3 - 5x + 4 = 0$ divisa per $x - 1$, faffi $x^2 + x - 4 = 0$.

E l'equazione $x^3 - 5x^2 + 4$ divisa per $x - 1$, faffi $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Così pure la equazione $x^4 - 7x + 6 = 0$, faffi $x^4 + x^3 + x - 6 = 0$, e la equazione $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$, faffi $x^4 - 6x^2 - 6x - 6 = 0$.

PARTE SECONDA

173

Delle serie geometriche decrescenti all' infinito.

IN codesta sorta di progressioni il minor estremo svanendo rispetto al primo, talchè la differenza tra essi sia lo stesso primo termine, e la potestà di essa differenza sia la stessa, che del primo termine; ne segue, che la formola

generale del teorema, $a : b :: \overline{d^m - 1} \times \overline{d^n - 1} : \overline{d^m - 1}$
 $\times \overline{d^n - 1}$, facciasi $a : b :: \overline{d^m - 1} : \overline{d^n - 1}$: poichè $\overline{d^m - 1} = \overline{d^n - 1}$; ma come d all' 1, così ogni termine antecedente al suo susseguente; quindi per le serie decrescenti all' infinito avrassi il seguente

T E O R E M A.

Qualunque potestà di tutta una serie infinita alla somma delle potestà simili di ogni termine, sta come la differenza delle potestà di ogni due termini successivi alla potestà della loro differenza, nella stessa, od in altra simile serie.

C O R O L L A R I O P R I M O.

Dividendo tanto $d^m - 1$, quanto $\overline{d^n - 1}$ per $d - 1$, avrassi ancora $a : b :: d^{m-1} + d^{m-2} + \text{ec.} \dots + d + 1 : \overline{d^n - 1}$.

Se l'indice delle potestà m sia $= 1$, farassi $a = b$, e $\overline{d^m - 1} \times \overline{d^n - 1} = \overline{d^m - 1} \times \overline{d^n - 1}$; e $d^m - 1 : d^n - 1 :: d^m - 1 : d^n - 1$.

Dividendosi i termini della seconda ragione per $d - 1$, rimane $d^m - 1 : d^n - 1 :: d^{m-1} + d^{m-2} + d^{m-3} + \text{ec.}$ continuato all' infinito, all' 1, ed alternando $d^m - 1 : d^n - 1$

$+ d^{m-1} + d^{m-2} + \text{ec.}$ continua all'infinito :: $d - 1 : 1$;
cioè il primo termine alla somma di tutti gli altri, co-
me la differenza tra due termini successivi al minore di essi.
E componendo farsi ancora $d^m + d^{m-1} + d^{m-2} + \text{ec.}$..
all' infinito : $d^m + d^{m-1} + d^{m-2} + \text{ec.}$.. all'infini-
to :: $d : 1$; e per conversion di ragione, $d^m + d^{m-1} +$
 $d^{m-2} + \text{ec.} : d^m :: d : d - 1$; cioè tutta la serie al primo
termine, come qualunque termine alla differenza fra esso,
ed il termine minore, o sia come il denominatore della ra-
gione allo stesso denominatore diminuito dell' unità.

Sia $m = 2$, avrassi $a : b :: d + 1 : d - 1$, cioè il
quadrato di tutta la serie alla somma dei quadrati di ogni
termine, sta come la somma di due termini successivi nella
stessa, od in simile serie, alla loro differenza.

C O R O L L A R I O 1.º

Essendo nella serie finite $a + b : 2b$: come tutta la se-
rie accresciuta di un termine alla somma degli estremi, e
nelle decrescenti all' infinito, il minor estremo rispetto al mag-
giore essendo nullo, farassi $a + b : 2b$, come tutta la se-
rie al primo, e massimo termine.

Sia $m = 3$, e farassi $a : b :: d^3 + d + 1 : d^3 - 2d + 1$,
cioè il cubo di tutta la serie alla somma dei cubi di ogni
termine, come la somma di tre termini successivi alla diffe-
renza tra la somma degli estremi, ed il doppio termine di
mezzo.

E per conversion di ragione, farassi ancora $a : a - b$
:: $d^3 + d + 1 : 3d$; e dividendo i conseguenti per 3,

$a : \frac{a - b}{3} :: d^3 + d + 1 : d$; cioè il cubo di tutta la

serie alla terza parte della differenza tra esso cubo, e la
somma dei cubi di ciascun termine, sta come la somma di
tre termini successivi, al termine di mezzo.

Se $m = 4$, farassi $a : b :: d^3 + d^2 + d + 1 : d^3 - 3d^2 + 3d - 1$; cioè la quarta potestà di tutta la serie alla somma delle potestà quarte di ogni termine, sta come la somma di quattro termini successivi, presi nella stessa, od in simile serie, al cubo della differenza tra il terzo, e quarto di essi termini.

Per somigliante maniera possono ritrovarsi altri teoremi per le potestà più elevate nelle serie geometriche decrescenti all' infinito. Intanto per vedere l' uso di queste, soggiugnerò alcuni problemi.

PROBLEMA PRIMO.

Data la somma a delle potestà m di ogni termine, ed il denominatore della ragione d , trovare il primo, o massimo termine x di una serie decrescente all' infinito. Sarà (*cor. 1.*) $d^m : d^m - 1 :: a : x^m$; quindi $d^m x^m = a \times d^m - 1$; $x^m = \frac{a \times d^m - 1}{d^m}$, ed $x = \sqrt[m]{\frac{a \times d^m - 1}{d^m}}$.

PROBLEMA 2.º

- 12 Data la somma a delle potestà m di ciascun termine, e dato il primo, o massimo termine b , trovare il denominatore della ragione y . Sarà (*cor. 1. n. 11.*) $a : b^m :: y^m : y^m - 1$; quindi $a \times y^m - 1 = b^m y^m$, o sia $a y^m - a = b^m y^m$; $a y^m - b^m y^m = a$; $y^m = \frac{a}{a - b^m}$, e $y = \sqrt[m]{\frac{a}{a - b^m}}$.

PROBLEMA 3.º

Dato il primo, o massimo termine b , il denominatore della ragione d , trovare la somma x delle potestà m fatte

da ciascuno dei termini. Sarà (cor. 1.) $d^n : d^n - 1 :: x : b^n$;
quindi $d^n b^n = x \times d^n - 1$, ed $x = \frac{d^n b^n}{d^n - 1}$.

PROBLEMA 4.º

Data la somma a delle potestà m , e la somma b delle potestà n di ogni termine, ritrovare il denominatore della ragione y nella serie dei lati.

Il primo e massimo termine dicasi $= x$. Sarà $a : x^n ::$

$y^n : y^n - 1$; quindi $a y^n - a = x^n y^n$, ed $x^n = \frac{a y^n - a}{y^n}$;

ed ancora $x^{n+1} = \frac{a y^{n+1} - a}{y^{n+1}}$. Similmente farà $b : x^n :: y^n : y^n - 1$;

quindi $b y^n - b = x^n y^n$, onde $x^n = \frac{b y^n - b}{y^n}$, ed $x^n = \frac{y b^n - b^n}{y^n}$;

e perciò $a y^n - a = b y^n - b$, dalla quale equazione generale ricavansi le equazioni per i dati casi particolari.

PROBLEMA 5.º

Data la serie dei lati x , e la serie dei quadrati b , trovare il denominatore della ragione y .

Sarà in questo caso $m = 1$, ed $n = 2$; e quindi

la formola farassi $a y - a = b y^2 - b$; cioè $a^2 \times y - 1^2 = b \times y^2 - 1^2$; e dividendo per $y - 1$, farassi $a^2 \times \frac{y - 1}{y - 1} = b \times \frac{y^2 - 1}{y - 1}$; onde ricavasi $a^2 y - b y = a^2 + b$,

e finalmente $y = \frac{a^2 + b}{a^2 - b}$, o pure, chiamandosi come so-

pra a la serie dei lati, ed $a b$ la serie dei quadrati, farà $a^2 : a b$, o pure $a : b :: y + 1 : y - 1$; quindi

$$a y - a$$

$$ay - a = by + b, \text{ ed } ay - by = a + b, \text{ cioè } y = \frac{a+b}{a-b}.$$

PROBLEMA 6.

Data la serie dei lati a , e quella dei cubi b , ritrovare il denominatore della ragione y .

In questo caso, si è $m = 1$, $n = 3$, e perciò la formola farà $\overline{ay - a} = \overline{by^3 - b}$, cioè $a^3 \times \overline{y - 1} = b \times \overline{y^3 - 1}$. Dividendo per $y - 1$, ed ordinando l'equazione, trovasi $y^3 - \frac{2a^3 - b}{a^3 - b} \times y + 1 = 0$; o pure dicendosi $a^3 b$ la somma data dei cubi, avraffi $a^3 : a^3 b$, o sia $a : b :: y^3 + y + 1 : y^3 - 2y + 1$, e però $a \times \overline{y^3 - 2y + 1} = b \times \overline{y^3 + y + 1}$, onde $y^3 - \frac{2a - b}{a - b} \times y + 1 = 0$. La stessa equazione ritrovafi ancora, se si faccia $a : \frac{a - b}{3} :: y^3 + y + 1 : y$.

PROBLEMA 7.

Data la serie dei quadrati a , e la serie dei cubi b , trovare il denominatore nella serie dei lati.

In questo caso essendo $m = 2$, $n = 3$, la formola faffi $\overline{ay^2 - a} = \overline{by^3 - b}$, cioè $a^3 \times \overline{y^2 - 1} = b \times \overline{y^3 - 1}$. Dividendo per $y - 1$, faffi $a^3 \times \overline{y + 1} = b \times \overline{y^2 + y + 1}$, equazione, che monta al quarto grado.

PROBLEMA 8.°

Data la serie dei cubi a , e dei quadrato-quadrati b , trovare il denominatore y nella serie dei lati.

Essendo $m = 3$, $n = 4$, la formola farassi $\overline{ay^3 - a^4} = \overline{by^4 - b}$, cioè $a \times \overline{y^3 - 1^4} = b \times \overline{y^4 - 1^4}$, ove fatte le potestà, e moltiplicazioni indicate, ed ordinando i termini, trovasi una equazione, che pare del duodecimo grado; ma che può ridursi al 9, poichè $\overline{y^3 - 1^4}$, e $\overline{y^4 - 1^4}$, sono divisibili per $y^3 - 3y^2 + 3y - 1$; ma con ciò la equazione diventa compiuta di tutti i suoi termini.

PROBLEMA 9.°

Dato il primo, o massimo termine a , e data la somma dei quadrati b , trovare la serie de' lati x .

Sarà $x : a :: x^2 + b : 2b$; quindi $2bx = ax^2 + ab$,

$$\text{o pure } x^2 - \frac{2bx + ab}{a} = 0.$$

PROBLEMA 10.°

Data la somma a di tutta la serie, ed il primo, e massimo termine b , trovare la serie dei quadrati x^2 .

Essendo $a : b :: a^2 + x : 2x$, farà ancora $2ax =$

$$a^2b + bx; \text{ quindi } x = \frac{a^2b}{2a - b}.$$

PROBLEMA 11.°

Data la serie dei lati a , ed il denominatore della ragione d , trovare la serie dei cubi x .

Prendasi $m = d^2 + d + 1$, avrassi (cor. 2. n. 11) $m :$
 $d :: a^3 : \frac{a^3 - x}{3}$, quindi $\frac{m a^3 - m x}{3} = a^3 d$, o pure $m x$
 $= m a^3 - 3 d a^3$, ed $x = a^3 - \frac{3 a^3 d}{m}$.

PROBLEMA 12.°

Date le medesime cose, cerchi si la serie dei quadrato-
 quadrati x .

Prendasi $m = d^3 + d^2 + d + 1$, e $n = d^3 - 3 d^2 +$
 $3 d - 1$, si avrà $m : n :: a^3 : x$; quindi sarà $m x = n a^3$,
 ed $x = \frac{n a^3}{m}$.

PROBLEMA 13.°

Data la somma a delle potestà m , e la somma b delle
 potestà n , trovare il primo, e massimo termine x nella se-
 rie dei lati.

Trovati il denominatore della serie per il problema 4.°, e
 per il problema 13.° del capo antecedente, troverassi il pri-
 mo, e qualunque altro termine assegnato; o pure chiama-
 dosi y il denominatore della ragione nella serie dei lati, sa-
 rà $a : x^m :: y^m : y^m - 1$; quindi $a \times y^m - 1$, cioè $a y^m - a$
 $= x^m y^m$, o pure $\overline{a - x^m} \times y^m = a$, $y^m = \frac{a}{a - x^m}$, e ancora
 $y^{m^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^{2m}}$.

Similmente avrassi $b : x^n :: y^n : y^n - 1$; e quindi $b y^n - b$
 $= x^n y^n$, o pure $\overline{b - x^n} \times y^n = b$, e perciò $y^n = \frac{b}{b - x^n}$,

ed ancora $y^{a^n} = \frac{b^n}{b-x^n}$. Dunque $\frac{a^n}{a-x^n} = \frac{b^n}{b-x^n}$, o

pure $a^n \times \overline{b-x^n} = b^n \times \overline{a-x^n}$.

Dalla quale ricavansi le equazioni nei casi particolari, per

esempio, sia $m = 1$, $n = 3$, avrassi $a^1 \times \overline{b-x^3} = b^1$

$\times \overline{a-x^3}$, cioè fatte le moltiplicazioni, e le potestà indicate, $a^1 b^1 - 1 a^1 b x^3 + a^1 x^6 = b^1 a^1 - 3 b^1 a^1 x^3 + 3 b^1 a x^6 - b^1 x^9$, dove togliendo comunemente $a^1 b^1$, e dividendo il rimanente per x^3 , trovasi $-1 a^1 b x + a^1 x^3 = -3 b^1 a^1 + 3 b^1 a x^3 - b^1 x^6$. Ordinando l'equazione, e dividendo per a^1

$+ b^1$. Trovasi finalmente $x^3 = \frac{3ab^1x^3 - 1abx + 3a^1b^1}{a^1 + b^1} = 0$.

PROBLEMA 14.°

Data la somma delle potestà m , e la somma delle potestà n , trovare la somma delle potestà p , fatte da ogni termine nella medesima serie dei lati.

Trovinsi per il problema 13.° il primo termine nella serie dei lati, ed il denominatore della ragione nella stessa serie per il problema 4.°, con ciò troverassi la somma delle potestà p per il problema 3.°.

Le risoluzioni de' problemi tanto di questo, che del capo precedente, mostrando abbastanza qual caso possa farsi di codesta teoria delle progressioni, e proporzioni geometriche, e quanto più oltre possa la medesima ancora estendersi. Lascio ad altri il pensiero di promoverla, e di farne la opportuna applicazione alle cose analitiche, geometriche, e fisico-matematiche.

ESERCITAZIONE SECONDA.

181.

*Esame del caso detto irriducibile nelle equazioni
del terzo grado.*

Essendo finora riuscite inutili le ricerche de' più grandi matematici dirette alla risoluzione generale, ed analitica delle equazioni del terzo grado; per altra parte innumerabili problemi sì di pura, che di mista matematica da una tale risoluzione dipendendo; anzi a questa riducendosi eziandio la risoluzione delle equazioni del quarto grado, e da queste quelle di altri gradi superiori, ciò gli costringe ad applicarsi a ripieghi diversi, a contentarsi di approssimazioni, e principalmente a distinguere le equazioni numeriche dalle geometriche. Nelle numeriche vanno indagando, se vi si trovino radici razionali; tentando dividere la propotta con una equazione lineare composta dell'incognita, e da alcuno dei divisori dell'ultimo termine, affetto col segno $+$, o $-$, secondo che le alternazioni, o continuazioni di un medesimo segno indicano essere negativo, o positivo lo stato delle medesime radici, quando sono tutte reali; ma se queste sono tutte reali insieme, ed irrazionali, non v'ha altro metodo, se non che di approssimazione, molte volte assai penoso, e molesto. Più felici sono nelle equazioni geometriche; poichè quelle di terzo, e quarto grado costruiscono medianti due curve coniche, ed ancora col dato circolo, e colla data curva conica; e le equazioni de' gradi superiori costruiscono medianti due curve anche di superiore grado; anzi tutte medianti la linea retta, ed una curva di quell'ordine, che prescrive il grado della stessa equazione; ma concessa pure l'esatta descrizione delle curve opportune, rimangono intanto sempre algebricamente inesprimibili i valori delle ricercate radici. Quindi è, che la più parte arretrati dalla difficoltà, ed affatto privi di migliori speranze, di cercare più non si curano, ed hanno talora quali in dispetto coloro, che s'ingegnano di fare qualche scoperta in

una materia cotanto utile nelle cose matematiche, e fisiche; ed intanto rimangono pressochè inaccessibili; nè, ch'io sappia, evvi alcuno, che nulla abbia tentato nelle equazioni superiori al quarto grado. Perciò già molti anni sono, cioè trovandomi in età più vigorosa, non potendome dar pace, risolvetti d'espiorare ogni via, e di attaccare, dirò così, per ogni parte codesta insuperabile difficoltà, onde almeno mi venisse fatto di trovarne alcuna generale, e per l'uso bastantemente esatta. Il successo non fu affatto vano, non dirò però qui quale esso siasi; lo dirai tu medesimo amico lettore, dopo che avrai attentamente esaminato questo mio scritto; solamente mi concedi que' principii, che sono generalmente conosciuti, e ricevuti, attorno la costituzione delle equazioni, la maniera di determinare le qualità, ed affezioni delle loro radici, e la natura de' coefficienti in ciascun dei loro termini: poichè il premettere ivi tutte queste cose, oltrechè inutili sarebbero per te, quale suppongo bastantemente versato in algebra, farebbero a dismisura crescere codesta esercitazione; onde sembrerebbe piuttosto un trattato, che una pura ricerca, o quistione algebrica.

1. Sia in primo luogo l'equazione compita di terzo grado

$$x^3 \dots px^2 \dots qx \dots r = 0.$$
 Saranno reali tutte le sue radici, se sarà $\frac{p^3}{3}$ maggiore di q , e $\frac{q^3}{3}$ maggiore di pr ;

ma se alcuna, od ambedue codeste condizioni mancheranno, una sola delle tre sarà reale, e le altre saranno immaginarie; cotale sorta di equazioni essendo sempre riducibili, di esse non farò particolare disamina, ma ne indicherò solo di passaggio l'abbastanza nota riduzione.

2. Nel supposto poi, che le radici della proposta equazione sieno tutte reali, è pur anche noto, che allora l'equazione riducesi al primo grado, quando due delle sue radici sono uguali, e nello stato medesimo, e che riducesi al secondo, se le due radici uguali trovinsi in istato contrario, cioè l'una positiva, e l'altra negativa, e la regola ti è quella: mul-

tiplichisi ciascun termine della data equazione per l'indice della potestà, in cui trovasi l'incognita nel termine medesimo, così farassi nullo l'ultimo termine, e l'equazione abbasserassi di un grado.

Per esempio, se l'equazione $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, pongasi avere due radici uguali, e nello stato medesimo. Giuita la regola farassi $3x^2 - 2px + q = 0$, cioè

$$x^2 - \frac{2}{3}px + q = 0, \text{ in cui non vi rimarrà, che una}$$

delle due radici uguali, e se questa medesima si supponga avere altresì uguali le sue radici, questa nello stesso modo

ridurrebbesi al primo grado, perchè farebbesi $2x - \frac{2}{3}px = 0$,

$$\text{cioè } x = \frac{p}{3}.$$

Vale la stessa regola eziandio nelle equazioni de' gradi più elevati, nelle quali per altro si sappia trovarsi radici uguali; ma finora non ho veduta regola generale, con cui possa conoscersi, se una data equazione abbia, o no radici uguali. Questa qui esporrò per le equazioni di terzo grado, cui mediante trovanfi nello stesso tempo le radici medesime.

Ricerca delle radici uguali nelle equazioni di terzo grado.

- 3 **L**E radici della data equazione potendo trovarsi tutte nello stato medesimo, o pure una di esse in l'uno, e le altre due nello stato opposto. Quindi ne nascono diversi casi, ciascuno de' quali ora esamineremo in particolare.

CASO PRIMO, e SECONDO.

L'equazione $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ avrà le sue radici tutte positive, e se le medesime faranno in oltre fra

loro uguali, per la natura dei coefficienti, avrassi $p = 3x$, $q = 3x^2$, $r = x^3$; e quindi $x = \sqrt[3]{\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{\frac{q}{3}} = \sqrt[3]{r}$, ed una cotale uguaglianza di tutte le tre radici verrà indicata dalla uguaglianza di $p q = g r = \frac{p^3}{3}$, o sieno tutte positive, o tutte negative le radici, siccome sono nella equazione $x^3 + p x^2 + q x + r = 0$.

C A S O 3.°, e 4.°

L'equazione $x^3 - p x^2 - q x + r = 0$ avrà due radici positive, ed una negativa; ma se la negativa pongasi = ad una delle positive, troverassi $p q = r$, perchè dicendosi $+y$, e $-y$ le due uguali poste in contrario stato, e z la rimanente; dovrà essere $z = p$, $y^2 = q$, e $y^3 z = r$; quindi $\pm y = \pm \sqrt[3]{q}$, ed ancora $p q = r$, lo stesso seguirà quando la terza radice z farà negativa, cioè l'equazione sia $x^3 + p x^2 - q x - r = 0$.

C A S O 5.°, e 6.°

Sia l'equazione $x^3 - p x^2 + q x - r = 0$, che avendo tre radici positive, due di esse sieno fra loro uguali, e vengano designate per y , e la rimanente per z . Sarà dunque $p = z + 2y$, $q = 2y z + y^2$, $y^2 z = r$. Dalla prima ricavasi $z = p - 2y$, che sostituito nella seconda, essa farà $2p y - 3y^2 = q$, onde $2p y^2 - 3y^3 = q y$. Lo stesso valore di z sostituito nella terza, ne dà $p y^2 - 2y^3 = r$. Sottraendo questa dalla precedente, rimane $p y^2 - y^3 = q y - r$, dalla quale raddoppiata sottraendo un'altra volta $p y^2 - 2y^3 = r$,

rimane $p y^2 = 2q y - 3r$; quindi $y^2 = \frac{2q y - 3r}{p}$, e

poichè

poichè $2py - 3y^2 = q$, avrassi anche $y^2 = \frac{2py - q}{3}$; e perciò $= \frac{2y - 3r}{p} = \frac{2py - q}{3}$. Togliendo le frazioni $2p^2y - pq = 3qy - qr$; onde ricavasi $y = \frac{pq - qr}{2p^2 - 6q}$, che è il valore di una delle radici uguali; e quindi la terza z sarà $= p - \frac{pq + qr}{p^2 - 3q} = \frac{p^3 - 4pq + qr}{p^2 - 3q}$.

Sostituendo $\frac{pq - qr}{2p^2 - 6q}$ in vece di y nella equazione $y^2 = \frac{2py - q}{3}$, fassi $p^2q^2 + 18pqr = 4p^3r + 4q^3 + 27r^2$, che di-

mostra l'uguaglianza di due radici nel caso, che tutte sieno positive, o negative, siccome lo sono nella equazione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

C A S O 7.°, ed 8.°

Trovandosi due radici uguali in uno stato, la terza può trovarsi nello stato contrario: in qual caso essa terza radice sarà maggiore, uguale, o minore della somma delle altre due: il che viene indicato dal segno, che precede il secondo termine. Sia in primo luogo essa terza radice z positiva, e maggiore della somma negativa delle due rimanenti $= -2y$; quindi l'equazione sia $x^3 - px^2 - qx - r = 0$. Sarà perciò $z = p + 2y$, $2yz - y^2 = q$, $y_2z = r$. Fatto il calcolo come nel caso precedente, trovasi $y =$

$$\frac{pq + 9r}{2p^2 + 6q}; \text{ e quindi } z = p + \frac{pq + 9r}{p^2 + 3q} = \frac{p^3 + 4pq + 9r}{p^2 + 3q},$$

e ciascuna delle due negative $= -\frac{pq - qr}{2p^2 + 6q}$.

A a

I medefimi valori sotto segni contrarii troverannosi nella equazione $x^3 + px^2 - qx + r = 0$; ed in ambidue i casi, l'uguaglianza delle due radici verrà indicata da $p^2q^2 + 4q^3 = 18pqr + 4p^3r + 27r^3$.

C A S O 9.°, e 10.°

Se la terza radice z sia uguale alla somma delle due rimanenti, ma in uno stato contrario; allora mancherà il secondo termine, poichè $z - 2y$, o pure $-z + 2y = 0$, rende anche $p = 0$, ed avrassi $3y^3 = q$, e $\pm y = \pm$

$\sqrt[3]{\frac{q}{3}}$, e $y^3z = r$, farassi $2y^3 = r$; quindi $4q^3 = 27r^3$, o pure $\frac{q^3}{27} = \frac{r^3}{4}$ in ambi i casi di $x^3 - qx \mp r = 0$.

C A S O 11.°, e 12.°

Se la terza radice z sia minore della somma delle due rimanenti poste in istato contrario; il che verrà pur anche indicato dal segno, che precede il secondo termine: allora il doppio della medesima radice farà maggiore, uguale, o minore di una sola delle due uguali, e ciò indicherà il segno del terzo termine. Sia in primo luogo z positiva minore della somma negativa $2y$ delle due uguali; ma $2z$ sia maggiore di y . In questo caso l'equazione sarà $x^3 + px^2 - qx - r = 0$, ed avrassi $z = 2y - p$; $2yz - y^3 = q$;

$y^3z = r$, onde ricavasi $y = \frac{9r - pq}{2p^2 + 6q}$; e quindi $z = -\frac{p^3 - 4pq + 9r}{p^2 + 3q}$. Gli stessi valori, ma con segni contrarii,

trovansi nel caso della equazione $x^3 - px^2 - qx + r = 0$, e l'uguaglianza delle due radici verrà indicata da $p^2q^2 + 18pqr + 4p^3r + 27r^3 = 0$.

C A S O 13.°, e 14.°

Se fosse $z = \frac{y}{2}$, cioè $2z = y$, allora mancherà il terzo termine; poichè $2y z = y^2$, cioè $q = 0$; quindi $z = \frac{p}{3}$, $y = \frac{2p}{3}$, $y^2 z = r = \frac{4p^2}{27}$, o pure $27r = 4p^2$, ciò che indicherà l'uguaglianza delle due radici nella equazione $x^2 \pm p x^{\frac{1}{2}} + r = 0$.

C A S O 15.°, e 16.°

Finalmente sia z positiva, e minore di $\frac{y}{2}$; ma $2z$ minore di y , allora l'equazione sarà $x^2 + p x^{\frac{1}{2}} + p x - r = 0$, e troverassi $y = \frac{pq + 9r}{2p^2 - 6q}$; e quindi $z = -\frac{p^2 + 4pq + qr}{p^2 - 3q}$,

e caduna delle negative uguali $-y$, sarà $= -\frac{pq - 9r}{2p^2 - 6q}$;

e gli stessi, ma con segni contrarii faranno i valori delle radici, nel caso opposto della equazione $x^2 - p x^{\frac{1}{2}} + q x + r = 0$. Sostituendo questo valore di y nell'equazione $2py - 3y^2 = q$. Trovasi l'uguaglianza $4p^2 r + p^2 q^2 = 18pqr + 27r^2 + 4q^3$.

- 4 Non potendosi dare altro caso di radici reali, ed uguali, ed a ciascun caso competendo la sua uguaglianza tra i prodotti dei coefficienti, colla sola diversità dei segni in alcuni di essi. Perciò l'uguaglianza per tutti i casi potrà esprimersi in questa maniera $p^2 q^2 \pm 18pqr \pm 4p^2 r^2 \pm 27r^3 = 0$. Ove l'ambiguità dei segni cade solamente nei tre termini di mezzo; di modo che $18pqr$ dovrà prenderli col segno proprio, e $4p^2 r^2$, e $27r^3$ col segno opposto a quello, che risulta dalla particolare equazione. Codetta formola, o criterio delle radici uguali sussiste ugualmente nelle equazioni compite, che

A a 2

in quelle, dove manca alcun termine, perchè basterà togliere dalla formola que' termini, in quali trovasi il coefficiente del termine mancante. Per esempio, se manchi il secondo termine, mancherà anche p , cioè sarà $p = 0$; e con ciò

la formola riducesi $4q^3 = 27r^3$, o sia $\frac{q^3}{27} = r^3$, come è

noto.

Se manchi il terzo termine, farassi $q = 0$, e perciò la formola farassi $4p^3r = 27r^3$, cioè $\frac{p^3}{27} = \frac{r}{4}$; se manchi l'ultimo termine r , cioè sia $r = 0$, e la formola sarà $p^3q^3 = 4q^3$, cioè $\frac{p^3}{4} = q$.

Dimostrerassi in altro luogo essere codesta formola il quadrato di un solido contenuto dalle differenze delle tre radici disuguali, il quale deve farsi nullo quando alcuna delle differenze è $= 0$. Se i coefficienti p , q , r della equazione generale $x^3 \dots p x^2 \dots q x \dots r = 0$, si chiamino a , ab , aac , la formola $p^3q^3 \dots 18pqr \dots 4p^3r \dots 4q^3 - 27r^3 = 0$, riducesi a quest'altra di tre dimensioni $ab^3 \dots 18abc \dots 4b^3 \dots 4a^3c - 27ac^2 = 0$.

Si accennano alcuni altri casi risolvibili.

5 **O**ltre al caso delle uguali, innumerabili altri possono darfi, nei quali l'equazione cubica di tre radici reali, si abbassa al secondo, od anche al primo grado, quantunque nella risoluzione de' problemi non apparisca, come ciò debba farsi; ma potrà scoprirsì dalla natura stessa della equazione, a cui in fine il problema riducesi.

Sia in primo luogo una equazione di tre radici reali poste in un medesimo stato: dico, se sarà $3pq = 2p^3 + 9r$, che saranno aritmeticamente proporzionali; e la media tra esse sarà $= \frac{p}{3}$.

Siano aritmeticamente proporzionali $\therefore u \cdot y \cdot z$, sarà $u + y + z$, e perciò $3y = p$, e $y = \frac{p}{3}$; sarà ancora uy

$+ yz + uz = q$; ed $uz = q - \frac{2p^2}{9}$; ma dalla equazione

si ha $uyz = r$, dunque $\sqrt{q - \frac{2p^2}{9}} \times \frac{p}{3}$, cioè $\frac{pq}{3} - \frac{2p^3}{9} = r$;

e quindi $3pq = 2p^3 + 9r$.

Se la radice media y fosse in istato diverso, farebbe $y = p$, e quindi $2p^3 + pq = r$.

CASO 2.°

Se le radici sieno della medesima affezione, ma $q^2 = p^3r$, faranno geometricamente proporzionali, e la media sarà $= \frac{q}{p}$.

Sieno geometricamente proporzionali $\therefore u \cdot y \cdot z$, sarà $u + y + z$, o pure $u + y + \frac{y^3}{u} = p$, e $u^2 + uy + y^2 = pu$; sarà ancora $uy + y^2 + \frac{y^3}{u} = q$; e quindi $u^2y + uy^2 + y^3 = u^2 + uy + y^2 \times y = pu y = qu$. Dunque $py = q$, e y

$\frac{190}{P} \frac{q}{P}$; ma per la proporzione continua, $uyz = y^2 = r$,
 dunque $\frac{q^2}{p^2} = r$; e perciò $q^2 = p^2 r$.

C A S O 3.^o

Se le tre radici sieno della medesima affezione, ed in oltre $3pqr = 2q^3 + 27r^3$, esse faranno armonicamente proporzionali, e la media sarà $= \frac{3r}{q}$. Sieno armonicamente proporzionali $u \cdot y \cdot z$; farà dunque $u : z :: y - u : z - y$; quindi $uz - uy = yz - uz$, ed ancora $2uz = \overline{z + u} \times y$; $uz = \frac{z + u}{2} \times y$; ma $uy + yz + uz = q$; dunque $\frac{3uy + 3zy}{2} = q$, ed $uy + zy = \frac{2q}{3}$; quindi $uz = \frac{q}{3}$; ma si è ancora $uy + zy = \overline{p - y} \times y = py^2 - y^3$. Dunque $py - y^3 = \frac{2q}{3}$. In oltre $uyz = r$, ed $uz = \frac{q}{3}$, dunque $y = \frac{3r}{q}$. Sostituendo questo valore di y nella equazione $py - y^3 = \frac{2q}{3}$, trovasi $3pqr = 2q^3 + 27r^3$. Se la media y fosse in uno stato contrario alle altre, troverebbesi $y = \frac{r}{q}$, e $2q^3 = pqr + r^3$.

Ancora quando alcuna delle estreme, in qualunque delle suddette proporzioni, fosse in istato diverso dalle altre due, l'equazione ridurresti al secondo grado, i quai casi per brevità tralascio, vedendosi in questi la maniera di determinarli.

Se le tre radici sieno nello stesso stato, ma la massima si uguagli alla somma delle due rimanenti, avrassi $p q = 2r + \frac{p^2}{4}$, o pure $4pq = 8r + p^2$. Sieno le tre radici u, y, z ; ma $u = y + z$, farà tanto u , quanto $y + z = \frac{p}{2}$, e farà $uy + uz + yz = q$; ma $uy + uz$, cioè $y + z \times u = \frac{p^2}{4}$, dunque $yz = q - \frac{p^2}{4}$; si ha ancora $uyz = r$, dunque $\frac{q - \frac{p^2}{4}}{4} \times \frac{p^2}{2}$, o sia $\frac{pq}{2} - \frac{p^3}{8} = r$, o pure $4pq = 8r + p^3$, e $p q = 2r + \frac{p^3}{4}$.

CASO 5.^o

Se le tre radici u, y, z sieno nello stesso stato; ma tale che $u : y :: z : y + z$; avrassi $u = \frac{2r}{q}$, e $4pqr = 8r^2 + q^2$. Essendo $u : y :: z : y + z$, avrassi $uy + uz = yz$; ma $uy + yz + uz = q$; dunque farà tanto $uy + uz$, quanto $yz = \frac{q}{2}$; ma $uyz = r$; dunque $u = \frac{r}{yz} = \frac{2r}{q}$, e $y + z = p - \frac{2r}{q}$, ed essendo $uy + uz = y + z \times u = \frac{2r}{q} \times p - \frac{2r}{q} = \frac{2pr}{q} - \frac{4r^2}{q^2} = \frac{q}{2}$, farà in fine $4pqr = 8r^2 + q^2$.

Tentiamo finalmente la riduzione della equazione $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, le cui radici sieno tutte reali, e disuguali, e sieno rappresentate per $z, y + t, y - t$, avrassi $z + 2y = p$; $2zy + y^2 - t^2 = q$; $y^2z - t^2z = r$, dalla prima ricavasi $z = p - 2y$, sostituendo questo valore di z nella seconda, e moltiplicando per y , trovasi $2py^2 - 3y^3 - t^2y = qy$; lo stesso valore di z sostituito nella terza, dona $py^2 - 2y^3 - pt^2 + 2yt^2 = r$, che sottratta dalla precedente, dona il residuo $py^2 - y^3 - t^2y + p^2 - 2yt^2 = qy - r$: dal doppio di questa $2py^2 - 2y^3 - 2t^2y + 2pt^2 - 4yt^2 = 2qy - 2r$, sottraggasi di bel nuovo $py^2 - 2y^3 - pt^2 + 2yt^2 = r$; rimane $py^2 + 3pt^2 - 8yt^2 = 2qy - 3r$ o pure $py^2 = 2qy - 3r - 3pt^2 + 8yt^2$, e dividendo p , fassi $y^2 = \frac{2qy - 3r - 3pt^2 + 8yt^2}{p}$; ma dal-

la equazione $2py - 3y^2 - t^2 = q$, ricavasi $y^2 = \frac{2py - t^2 - q}{3}$, farà dunque $\frac{2py - t^2 - q}{3} = \frac{2qy - 3r - 3pt^2 + 8yt^2}{p}$.

Togliendo le frazioni, e ponendo da una parte tutti i termini, nei quali trovasi y , fassi $2p^2y - 6qy - 24yt^2 = pq - 9r - 8pt^2$. Dividendo per $2p^2 - 6q - 24t^2$, trovasi

$x = \frac{pq - 9r - 8pt^2}{2p^2 - 6q - 24t^2}$. D'onde eliminando $t^2 = 2py - 3y^2 - q$, trovasi $y^3 - py^2 + \frac{p^2 + q}{4} \times y - \frac{pq + r}{8} = 0$, della stessa

natura, e forma della principale proposta, in cui però osserveremo, che i tre valori reali di y rappresentano le semisomme d'ogni due valori di x ; quindi, poichè con questa sorta di trasformazione, l'equazione proposta si è cangiata in questa, così se questa medesima si trasformi in un'altra, cangierassi ancora in altra della stessa indole, e natura, e così

così all' infinito. Intanto però per una cotale continua trasformazione, continuamente diminuiscono le differenze delle radici nella ragione doppia; dunque nell' equazione infinitesima, per parlare così, le differenze spariranno, e faranno uguali tutte le tre radici; e la prima proposta $x^3 - p x^2 + q x - r = 0$ trasformata all' infinito, dicendosi z l' inde-

$$\text{terminata, farebbesi } z^3 - p z^2 + \frac{p^2 z}{2} - \frac{p^3}{27} = 0, \text{ dove } z = \frac{p}{3}.$$

Se nella equazione $2py - 3y^3 - t^3 = q$, in luogo di y , si sostituisca il suo valore $\frac{pq - 9r - 8pt^3}{2p^3 - 6q - 24t^3}$, ne nasce l'equa-

$$\left. \begin{aligned} 64t^6 + 96qt^4 + 36q^2t^2 - p^2q^2 \\ + 32p^3 - 24p^2q - 18pqr \\ + 4p^3 + 4p^2r \\ + 4q^3 \\ + 27r^3 \end{aligned} \right\} = 0.$$

Dove in luogo di $2t$, e sue potestà, scrivendosi z , e le sue potestà, cioè che z rappresenti la differenza intera d'ogni due radici, avraffi

$$\left. \begin{aligned} z^6 + 6qz^4 + 9q^2z^2 \\ - 2p^3 - 6p^2q \\ + p^3 \end{aligned} \right\} = p^2q^2 + 18pqr - 4p^3r - 4q^3 - 27r^3.$$

Ma il primo membro di questa equazione si è il quadrato

$$\text{di } z^3 - p^2 + 3q \times z, \text{ dunque sarà } z^3 - p^2 + 3q \times z =$$

$\sqrt{p^2q^2 + 18pqr - 4p^3r - 4q^3 - 27r^3}$. In oltre l' ultimo termine di ogni equazione estendo il prodotto da tutte insieme le radici della equazione; apparisce, che $p^2q^2 \dots 18pqr \dots 4p^3r \dots 4q^3 - 27r^3$ è il quadrato del solido fatto

dai tre valori di z , cioè di $z^3 + \frac{3q - p^2}{Bb} \times z$, il quale faffi

nullo, quando alcuna delle differenze è nulla, cioè nel caso di due radici uguali; potendosi gli altri casi dimostrare nella stessa maniera.

Intanto siamo giunti a dover risolvere una equazione di terzo grado, in cui manca il secondo termine, il che potea ottenersi per la via allai più breve delle note trasformazioni, e la difficoltà rimane tutta intera da superarsi: cioè rimane a cercarsi la risoluzione di codesta specie di equazioni.

*Delle equazioni del terzo grado, che mancano
del secondo termine.*

6 **L**E equazioni mancanti di qualche termine sembrano di più facile risoluzione: perchè in esse una delle radici pare alquanto più determinata, in forza della quale, se le medesime si trovassero tutte nello stato medesimo, l'equazione non salirebbe oltre al secondo grado, come videsi sopra nei casi quarto, e quinto del n. 3.; ma non trovandosi tutte nello stato medesimo, manca il secondo, o pure il terzo termine, senza che essa maggior determinazione punto non ci aiuti a risolvere l'equazione. Intanto molti problemi portano a codesta sorta di equazioni, e le altre tutte ad essa facilmente possono ridursi, onde giovi fare uno speciale squitinio delle medesime.

Le diverse maniere di risolvere codeste equazioni non differiscono tra di loro, che in apparenza, e tutte concludono come quella già ritrovata da Nicolò Tartaglia fino dall'anno 1534., poichè in fine tutte si fondano in una medesima supposizione, la quale essendo sempre possibile nel caso di una sola radice reale, diviene sempre impossibile nel caso di tutte tre le radici reali. Sia la formola generale $x' + \pm qx \pm r = 0$. Pongasi $x = y + z$, che farà $x' = y' + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$; e però $\pm qx \pm r = \pm yz^2 + 3yz^2$,

dove osservando $3y^2z + 3yz^2$ essere lo stesso, che $3yz \times y + z$, o sia $3yz \times x$, se si ponga $3yz \times x = qx$, farà $3zy = q$,

e quindi $z = \frac{q}{3y}$, $z' = \frac{q'}{27y'}$; ma stando la supposizione di $3yz \times y + z = qx$, deve poi necessariamente essere $y' + z' = \pm r$, dove scrivendo $\frac{q'}{27y'}$ in luogo di z' haffi $y' + \frac{q'}{27y'} = \pm r$, o pure $y'^2 + \frac{q'}{27} = \pm ry'$, ed ancora $y'^2 + ry' + \frac{q'}{27} = 0$, equazione derivativa del secondo grado, che risolta ci dà $y' \pm \frac{r}{2} = \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} \pm \frac{q'}{27})}$,

e finalmente $y = \sqrt[3]{[\pm \frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} \pm \frac{q'}{27})}]}$.

Colla stessa legge dovendosi pure determinare l'altra parte indeterminata z della radice $y + z$; dunque, se l'una y

sia $= \sqrt[3]{[\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{r^2}{4} \pm \frac{q'}{27})}]}$, l'altra z sarà $=$

$\sqrt[3]{[\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{r^2}{4} \pm \frac{q'}{27})}]}$; e le due parti insieme $x + y$,

cioè x sarà $= \sqrt[3]{[\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{r^2}{4} \pm \frac{q'}{27})}]} + \sqrt[3]{[\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{r^2}{4} \pm \frac{q'}{27})}]}$.

Trovato un valore di x , che dicasi $= f$; dividendosi la proposta equazione per $x + f = 0$, il quoziente farà una equazione del secondo grado, la quale conterrà gli altri due valori della medesima x .

7 Ottimamente procede il metodo, quando estrarre deeſi la radice quadrata da $\frac{r^3}{4} + \frac{q^3}{27}$, o pure da $\frac{r^3}{4} - \frac{q^3}{27}$, ſe ſia $\frac{q^3}{27}$ minore di $\frac{r^3}{4}$, perchè tale radice farà ſempre quantità reale, ma ciò non ſuccede, fuorchè quando l'equazione non ha che una radice reale, poichè quando ſono tutte tre reali, mai può eſſere $\frac{q^3}{27}$ minore di $\frac{r^3}{4}$, e ſotto al ſegno radicale ſempre avrà il ſegno $-$; e quindi $\frac{r^3}{4} - \frac{q^3}{27}$ farà ſempre quantità negativa, e $\sqrt{(\frac{r^3}{4} - \frac{q^3}{27})}$ ſempre immaginaria; dunque nel metodo evvi neceſſariamente una ſuppoſizione, che ſempre ſi verifica nel caſo di una ſola radice reale, e che ſempre è impoſſibile nel caſo di tre radici reali; il che fu pure detto da alcuni, ma non iſpiegato, nè dimoſtrato da veruno, che io ſappia, finora.

La ſuppoſizione comune ai due caſi è quella di $3yz = q$, o ſia di $yz = \frac{q}{3}$, e queſta ſempre verificaſi nel primo

caſo, ed è ſempre impoſſibile nel ſecondo: affine di dimoſtrare la verità di queſto aſſunto con tutta l'evidenza.

Ripigliſi la ſteſſa formula generale $x^3 + qx + r = 0$, dove la radice reale pongaſi $= +2a$, e le due immaginarie ſieno $+a + \sqrt{-b^2}$, e $+a + \sqrt{-b^2}$. Talchè ſia $x + 2a = 0$, $x + a + \sqrt{-b^2} = 0$, ed $x + a + \sqrt{-b^2} = 0$. Dalla moltiplicazione di queſte tre equazioni lineari, ne na-

ſce $x^3 - 3a^3 + b^3 \times x + 2a^3 + 2ab^2 = 0$, della ſteſſa forma, che la propoſta. Fatto il paragone de' termini corri-

spondenti, trovasi in primo luogo $-3a^2 + b^2 = \pm q$, o pure $3a^2 - b^2 = \pm q$, cioè $= +q$, se sia $3a^2$ maggiore di b^2 , ed $= -q$, se sia $3a^2$ minore di b^2 , non farà però mai $3a^2 = b^2$, perchè allora $3a^2 - b^2$ farebbe $= 0$, e quindi ancora $q = 0$, cioè mancherebbe il terzo termine, contro alla supposizione. Ora essendo $3a^2 - b^2 = \pm q$, farà ancora $a^2 - \frac{b^2}{3} = \pm \frac{q}{3}$, ed $a^2 = \pm \frac{q+b^2}{3}$, cioè a^2 sempre maggiore di $\pm \frac{q}{3}$.

In secondo luogo trovasi $2a^2 + 2ab^2 = r$; e quindi $a^2 + ab^2 = \frac{r}{2}$, dove l'ultimo termine r è preceduto dal segno $+$, se la radice reale $2a$ sia negativa, o dal segno $-$, se sia positiva.

Sieno poi tutte reali le radici della formola $x^3 + -qx + r = 0$, dove la massima dicasi $= \pm 2a$, e le due rimanenti sieno $\pm a \pm b$, e $\mp a \pm b$; onde abbianfi le tre equazioni lineari $x + 2a = 0$, $x + a + b = 0$, ed $x + a - b = 0$. Dalla moltiplicazione delle quali ne na-

sce $x^3 - 3a^2 - b^2 \times x + 2a^2 + 2ab^2 = 0$ della stessa forma della proposta. Dal paragone dei termini corrispondenti, se ne ricava in primo luogo $3a^2 + b^2 = q$, o sia $a^2 + \frac{b^2}{3} = \frac{q}{3}$, ed $a^2 = \frac{q-b^2}{3}$, cioè a^2 minore di $\frac{q}{3}$, ed il termine qx sempre affetto col segno $-$. In secondo luogo si ha $2a^2 - 2ab^2 = r$, ed $a^2 - ab^2 = \frac{r}{2}$, e l'ultimo termine r affetto col segno $+$, quando la radice reale $2a$ è negativa, e col segno $-$, quando è positiva.

8. Poste queste cose, quando nel metodo comune ponessi

$y z = \frac{q}{3}$, si pone il rettangolo delle parti y , e z di x , cioè di $2a$, $= \frac{q}{3}$; ma nel caso di una sola radice reale, fassi $a^2 - \frac{b^2}{3} = \frac{q}{3}$, o sia $a^2 = \frac{q + b^2}{3}$, onde $\frac{q}{3}$ sia

sempre minore di a^2 , cioè il rettangolo delle parti disuguali minore del quadrato della metà di tutta la grandezza $2a$, il che è sempre vero, per la prop. 5. del lib. 2.^o, o per la 18.^a del 6.^o di Euclide, quindi sempre è possibile che

$y z$ sia $= \frac{q}{3}$; e perciò sempre se ne trova reale il valore

di x , e di ogni sua parte y , e z .

Per l'oppolto, nel caso delle tre radici reali, ponendosi

$y z = \frac{q}{3}$ ponessi $a^2 + \frac{b^2}{3} = \frac{q}{3}$, cioè $a^2 = \frac{q - b^2}{3}$; e

quindi il quadrato a^2 della metà di $2a$, minore del rettangolo fatto dalle sue parti disuguali y , e z ; il che è sempre impossibile per le citate proposizioni di Euclide; quindi non è meraviglia, che da una supposizione sempre impossibile sempre ne nascano espressioni impossibili, cioè quantità immaginarie. Dunque niun mistero ivi si nasconde, come pensarono alcuni matematici, i quali cercarono nella metafisica la ragione di una conseguenza immediatamente dedotta da un principio puramente geometrico. Codesta verità io scoprii già sono più di anni 20., e la comunicai ad alcuni soggetti di alto valore, senza averne veduto prima indizio presso veruno scrittore; e già sono oltre ad anni 15., che pubblicamente la insegno nella mia scuola.

Altra maniera di risolvere le equazioni di terzo grado, mancanti del secondo termine.

C A S O P R I M O.

- 9 Sia la formola $x^3 + \pm qx - r = 0$, di cui la radice reale sia $= 2a$, e le due altre immaginarie sieno $-\alpha - \sqrt{-b^2}$, $-\alpha + \sqrt{-b^2}$, onde le equazioni lineari componenti siano $x - 2a = 0$, $x + \alpha + \sqrt{-b^2} = 0$, $x + \alpha - \sqrt{-b^2} = 0$. Sarà la composta $x^3 + -3\alpha^2 + b^2 \times x - 2a^3 - 2ab^2 = 0$, simile alla proposta, e dal paragone dei termini corrispondenti ricavasi $\alpha^2 - \frac{b^2}{3} = \pm q$, ed $\alpha^3 + ab^2 = \frac{r}{2}$. Per isfuggire le frazioni nel calcolo pigliasi $c^2 = \frac{b^2}{3}$, ed avrassi $\alpha^2 - c^2 = \pm \frac{q}{3}$, ed $\alpha^3 + 3\alpha c^2 = \frac{r}{2}$, cubando la prima, e quadrando la seconda di queste; fassi $\alpha^6 - 3\alpha^2 c^2 + 3\alpha^2 c^4 - c^6 = \pm \frac{q^3}{27}$, ed $\alpha^6 + 6\alpha^2 c^2 + 9\alpha^2 c^4 = \frac{r^2}{4}$, essendo questo quadrato maggiore di quel cubo, sottrissi esso quadrato dal cubo, e rimane il quadrato $9\alpha^2 c^2 + 6\alpha^2 c^4 + c^6 = \frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}$, dove vedesi il perchè in questo caso abbisi sempre $\frac{r^2}{4}$ maggiore di $\frac{q^3}{27}$; ed estraendo da ambe le parti la radice quadrata, avrassi $3\alpha^2 c + c^3 = \sqrt{(\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27})}$, e quindi il cubo perfetto $\alpha^3 + 3\alpha^2 c + 3\alpha c^2$

$$+ c^3 = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}, \text{ siccome ancora il cubo}$$

$$a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}.$$

Estraendo la radice cubica in amendue queste equazioni, trovasi nella prima $a + c = \sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$, e

nella seconda $a - c = \sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$, e quindi la somma di queste due ne dà $2a$, cioè x , = $\sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$, appunto come col metodo ordinario.

Sottraendo la seconda parte dalla prima, trovasi $2c$ = $\sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]} - \sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$,

quindi $c = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]} - \frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$, e $3c^3$, cioè b^3 , farà = $3 \times \frac{1}{2} \times$

$\left(\sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]}\right)^3$. Onde

avrannosi ancora le espressioni delle due radici immaginarie

$$-a \mp \sqrt{-b^3}, \text{ cioè } -\frac{1}{2} \sqrt[3]{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^3}{4} \mp \frac{q^3}{27}\right)}\right]}$$

$$- \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^2}{27}\right)}\right] \mp \sqrt{-3} \times \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left[\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^2}{27}\right)}\right]} - \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^2}{27}\right)}\right]}\right)^2}.$$

O S S E R V A Z I O N E.

Qui è da notarsi, che se la radice reale $2a$, ed il valore di b assoluto sieno razionali, farà irrazionale il valore di

$$\sqrt{\left(\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^2}{27}\right)}: \text{ perchè farà irrazionale il valore di } c = \frac{b}{\sqrt{3}}, \text{ e quindi irrazionale } 3a^2c + c^3 = \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^2}{27}\right)}.$$

Per l'opposto se c sia razionale, faràsi razionale $3a^2c + c^3$, e però ancora $\sqrt{\left(\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^2}{27}\right)}$, ed irrazionale farà b , perchè $b = c\sqrt{3}$.

C A S O 1.º

10 Sia la formola $x^3 + qx - r = 0$, in cui la radice positiva $= 2a$, e le due minori, e negative sieno $-a - b$, e $-a + b$. Onde le componenti lineari sieno $x - 2a = 0$, $x + a + b = 0$, $x + a - b = 0$. Dalla mul-

tiplicazione delle quali ne nasce $x^3 + 3a^2 - b^2 \times x - 2a^3 + 2ab^2 = 0$, simile alla proposta. Dal paragone dei loro termini corrispondenti, ricavasi $3a^2 + b^2 = q$, e $2a^3$

$$- 2ab^2 = r. \text{ Pigliando anche ivi } c^3 = \frac{b^3}{3}, \text{ per sfuggire}$$

l'incomodo delle frazioni, o sia $b = c\sqrt{3}$, avrassi $a^3 + c^3$

C c

202
 $= \frac{q}{3}$, ed $a^3 - 3ac^2 = \frac{r}{2}$. Facendosi i cubi nella prima di queste equazioni, si ha $a^6 + 3a^4c^2 + 3a^2c^4 + c^6 = \frac{q^3}{27}$, e facendosi i quadrati nella seconda, si ha $a^6 - 6a^4c^2 + 9a^2c^4 = \frac{r^2}{4}$. Ma quivi il quadrato è minore del cubo, perchè sottratto dal cubo trovasi un residuo positivo, cioè il quadrato $9a^2c^4 - 6a^4c^2 + c^6 = \frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}$, dove apparisce il perchè nelle equazioni di questa spezie, non possa mai farsi $\frac{q^3}{27}$ minore di $\frac{r^2}{4}$.

Extraendosi poscia la radice quadrata, trovasi $3a^2c - c^3 = \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}$. Hanno pertanto due equazioni $a^3 - 3ac^2 = \frac{r}{2}$, e $3a^2c - c^3 = \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}$. La somma delle quali si è $a^3 + 3a^2c - 3ac^2 - c^3 = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}$, e la differenza tra esse trovasi $a^3 - 3a^2c - 3ac^2 + c^3 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}$.

Ma in ambidue il primo membro ha una forma di cubo imperfetta, poichè le di lui parti sono affette da segni diversi da quelli, che richiede la forma del cubo di una radice binomia. Onde pare, che il metodo andar non possa più innanzi. Intanto si noti, che se le tre radici sieno razionali, sarà sempre irrazionale $\sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)} = 3a^2c - c^3$:

perchè $c = \frac{b}{\sqrt{3}}$; ma se c sia razionale, lo sarà ancora ²⁰³

$\sqrt{\left(\frac{q^2}{47} - \frac{r}{4}\right)}$; ma sarà irrazionale b , perchè $= c\sqrt{3}$, e quindi faranno irrazionali almeno le due radici minori.

Osservisi ancora, che il cubo $a^3 + 3a^2c^2 + 3a^2c^4 + c^6$
 $= \frac{q^2}{27}$ è di sei dimensioni, perchè il suo lato $a^2 + c^2 =$
 $\frac{q}{3}$ è di due; ma considerandosi $a^2 + c^2 = \frac{q}{3}$ come un
 quadrato, avrassi sempre reale il suo lato $= \sqrt{\frac{q}{3}}$, e se

si consideri la somma di due quadrati $a^2 + c^2$ come un rettangolo, non sarà possibile trovarne i due lati per a , e per c , se non moltiplicando d'immaginarie, cioè l'uno $= a + \sqrt{-c^2}$, e l'altro $= b - \sqrt{-c^2}$, il quadrato poi $a^2 - 6a^2c^2 + 9a^2c^4$

$= \frac{r^2}{4}$ ha il suo lato $a^2 - 3ac^2 = \frac{r}{2}$ di tre dimensioni,

e questo medesimo è la metà della somma reale di due cubi immaginari.

L'uno de' quali è il cubo di $a + \sqrt{-c^2} = a^3 + 3a^2\sqrt{-c^2} - c^2 - 3ac^2 - c^2\sqrt{-c^2}$, e l'altro è il cubo di $a - \sqrt{-c^2} = a^3 - 3a^2\sqrt{-c^2} + 3ac^2 + c^2\sqrt{-c^2}$.

La somma de' quali è $2a^3 - 6ac^2 = r$; la metà $a^3 - 3ac^2 = \frac{r}{2}$; e la differenza dei medesimi è $= + \sqrt{6a^2 - 2c^4}$

$\sqrt{-c^2}$; la semidifferenza $= \sqrt{3a^2 - c^4} \sqrt{-c^2}$, il cui quadrato $= 9a^2c^2 + 6a^2c^4 - c^4 = \frac{r^2}{4} - \frac{q^2}{27}$, che preso positivamente, cioè $9a^2c^2 - 6a^2c^4 + c^4 = \frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4}$,

ha il suo lato reale $= 3a^2c - c^3 = \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)}$ di tre dimensioni.

Considerando il solido $3a^2c - c^3$, come fatto dal piano

$3a^3 - c^3 \times c$, l'uno de' suoi lati farà c , e gli altri due faranno quelli, che fra di loro moltiplicati fanno il piano $= 3a^3 - c^3$, che non è dato: essendo bensì dato $3a^3 + 3c^3 = q$, onde $3a^3 - c^3$ sia minore di q per $4c^3$.

Profeguimento delle ricerche per le equazioni numeriche.

A Vendosi $3a^2c - c^3 = \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)}$, ed $a^3 + c^3 = \frac{q}{3}$, ed anche $a^2c + c^3 = \frac{qc}{3}$, farà $3a^2c - c^3 + a^2c + c^3$, cioè $4a^2c = \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)} + \frac{qc}{3}$, e dividendo per c , farà $4a^2$, o sia $xx = \frac{q}{3} + \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)} \times \frac{1}{c}$.

In oltre $3a^3 + 3c^3$ tanto si fa coll'aggiugnere al $3a^3 - c^3$ il $4c^3$, quanto col sottrarre dal $4c^3$ il $-3a^3 + c^3$; così pure fassi $4a^3$ coll'aggiugnere al $3a^3 - c^3$ il $+a^3 + c^3$, quanto col sottrarre dall' $a^3 + c^3$ il $-3a^3 + c^3$. Ed ogni qualvolta nella equazione q , ed r faranno numeri razionali, farà razionale, od al più radicale quadratico il numero $=$

$\sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)}$; perciò, se ridurraffi alla sua più semplice espressione in questa forma $m\sqrt{n}$, dove m rappresenti $3a^3 - c^3$, e $\sqrt{n}$ rappresenti l'indeterminata c , farà $n = c^3 = \frac{b^3}{3}$,

e però $\sqrt{n} = \frac{b}{\sqrt{3}}$. Onde sarà razionale il valore di c ogni

qualvolta b sarà irrazionale, ma commenfurabile con $\sqrt{3}$; ed all'opposto sarà sempre irrazionale il valore di c , ogni qualvolta b sarà razionale. Dunque, se sarà $\sqrt{n}$ veramente

$= c$, avrassi sempre $4n \pm m = q$, e ancora $\frac{q}{3} \pm m =$

$$4a^2 = x^2.$$

Riducendosi $\sqrt{(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4})}$, potrà trovarsi razionale, e

allora sarà $\sqrt{n} = r$, e se si trovi m maggiore di q , esso potrà dividerfi per qualche numero g , che lo renda minore di q , ed affine che non si alteri il valore di $m\sqrt{n}$, dovrà pure moltiplicarsi per g la radicale $\sqrt{n}$, cosicchè resti

$m\sqrt{n} = \frac{m}{g} \times g\sqrt{n}$. Ciò farassi più chiaro con i seguenti

esempi.

ESEMPIO 1.°

Sia l'equazione $x^3 - 78x - 220 = 0$. Ivi $\sqrt{(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4})}$,

cioè $m\sqrt{n}$ trovasi $= 74 = 74\sqrt{1}$; ma trovandosi $m + 4n$

$= 78 = q$, farà altresì $\frac{q}{3} + m$, o sia $26 + 74 = 100$

$= 4a^2$, $= x^2$; e però $x = 10$, le due radici rimanenti, e negative essendo $-5 - \sqrt{3}$, e $-5 + \sqrt{3}$, dove il $3 = b^2$, e $c^2 = 1$.

ESEMPIO 2.°

Sia $x^3 - 117x - 324 = 0$. Ivi trovasi $\sqrt{(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4})}$,

o sia $m\sqrt{n} = 105\sqrt{3}$; e poichè $4n + m = q$, cioè $12 + 105 = 117$, farà altresì $\frac{q}{3} + m$, cioè $39 + 105$, o sia $144 = 4a^2 = x^2$, ed $x = 12$; le due altre radici essendo -9 , e -3 , $b = 3$, e $c = \sqrt{3}$.

ESEMPIO 3.°

Sia $x^3 - 31x - 30 = 0$. Sarà ivi $\sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)}$, o sia $m\sqrt{n} = \frac{154}{3\sqrt{3}} = 51\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$, dove m è maggiore di q , dividasi però per 3 il $51\frac{1}{3}$, e moltiplichisi per 2 il radicale $\sqrt{\frac{1}{3}}$; avrafi $25\frac{2}{3} \times 2\sqrt{\frac{1}{3}}$. Con che fafi $25\frac{2}{3} + \frac{16}{3} = 31 = q$. Quindi farà ancora $\frac{q}{3} + \frac{m}{2}$, cioè $10\frac{1}{3} + 25\frac{2}{3} = x^3$, ed $x = 6$, e le altre due radici faranno -4 , e -2 ; $b = 1$, e $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ESEMPIO 4.°

Sia $x^3 - 197x - 944 = 0$. Ivi trovasi $m\sqrt{n} = \frac{571\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ $= 190\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$, e $4n + m = q$, cioè $\frac{20}{3} + 190\frac{1}{3} = 197$. Dunque $\frac{q}{3} + m$, cioè $65\frac{2}{3} + 190\frac{1}{3}$, o sia 216

$$= x^2, x = 16: \text{ le due radici rimanenti sono } -8 - \sqrt[207]{5},$$

$$e = 8 + \sqrt{5}, b = \sqrt{5}, c = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

OSSERVAZIONE.

Nelle equazioni numeriche nate dalla moltiplica di equazioni semplici non è possibile, che la radice- $2a$ sia tutta, o in parte radicale di qualsivoglia ordine, senza che la medesima non si manifesti in qualche modo in q , o in r ; il che non accade nelle geometriche, dove la divisibilità del continuo non ammette distinzione tra le linee rette, se non quando vuolsi esprimere la loro relazione con una qualche comune misura, che non può averfi.

ESEMPIO 5.º

Sia $x^3 - 25x - 6\sqrt{7} = 0$. Sarà ivi $m\sqrt{n} = \frac{118}{3\sqrt{3}} =$

$39 \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{3}}$, ma m essendo maggiore di q ; pigliasi $\frac{m}{2} \times$

$2\sqrt{n}$, cioè $19 \frac{2}{3} \sqrt{\frac{4}{3}}$, così farassi $19 \frac{2}{3} + \frac{16}{3} = 25$
 $= q$; e farà ancora $19 \frac{2}{3} + 8 \frac{1}{3}$, cioè $28 = 4a^2 = x^2$,
 ed $x = 2\sqrt{7}$; le due radici rimanenti essendo $-\sqrt{7} - 2$,
 e $-\sqrt{7} + 2$.

ESEMPIO 6.º

Sia $x^3 - \sqrt{12\sqrt{13}} - 100 \times x - 48\sqrt{13} - 24 = 0$.

Ivi fassi $m\sqrt{n} = \sqrt{12\sqrt{13} + 34 \frac{1}{1}} \times \sqrt{\frac{7}{3}}$; $4n = 65 \frac{1}{3}$;

$m + 4n = 12\sqrt{13} + 100 = q$. Dunque farà $m + \frac{q}{3}$, cioè
 $12\sqrt{13} + 34\frac{2}{3} + 4\sqrt{13} + 33\frac{1}{3}$, o sia $16\sqrt{13} +$
 $68 = 4a^2 = x^2$, quindi $x = 4 + 2\sqrt{13}$; e le altre due
 radici faranno $-2 - \sqrt{13} = -7$, e $-2 + \sqrt{13} = 7$.
 12 Ora lasciate le equazioni numeriche, cerchiamo qualche
 altra risoluzione più analitica, e generale. In primo luogo
 osservando, che $a^2 - 3ac^2 = \frac{r}{2}$, e $3a^2c - c^3 = \sqrt{(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4})}$,
 che dicasi $= qf$: se si potesse fare, che $3a^2c - c^3$, cioè
 $\sqrt{3a^2 - c^2} \times c$ divenisse uguale ad $a^2 - 3c^2$ moltiplicato per qual-
 che funzione data solamente per c , che dicasi $= t$, si avreb-
 be $\sqrt{3a^2 - c^2} \times a = \frac{r}{2}$, ed ancora $a^2 - 3c^2 \times t = qf$: onde
 $a : t :: \frac{r}{2} : qf$, o come $r : 2qf$; ed essendo nota la
 ragione di r al qf , farebbesi pure la medesima tra a , e c ;
 e con ciò sciolta farebbe la quistione; ma $\sqrt{3a^2 - c^2} \times c$ farsi $=$
 $= a^2 - 3c^2 \times 3c + \frac{c}{3}$; quando sia $a^2 = 27c^2$: poichè
 $\sqrt{3a^2 - c^2} \times (3c + \frac{c}{3}) = 3a^2c - 9c^3 + \frac{a^2c}{3} - c^3$, ove acciò
 si elidano $-9c^3$, ed $\frac{a^2c}{3}$, deve farsi $a^2 = 27c^2$; ma $3c^2$
 $= b^2$; quindi $a^2 = 9b^2$, ed $a = 3b$, o sia $b = \frac{a}{3}$, cioè
 la semi-differenza delle due radici negative, o positive, de-
 ve essere uguale alla terza parte della metà, cioè alla sesta
 parte di tutta la radice $2a$: il che verificasi, quando $36q^2$
 $= 343r^2$.

$$\begin{aligned} &= 343r^3; \text{ poichè essendo per l'ipotesi, } a^3 = 17c^3, \text{ sarà } a^3 = 189 \\ &+ c^3 = a^3 + \frac{a^3}{27} = \frac{28a^3}{27} = \frac{9}{3}, \text{ e } 28a^3 = 99, 28a^3 \\ &= 99a; a^3 = \frac{99a}{28}. \end{aligned}$$

In oltre, essendo $a^3 - 3ac^2 = \frac{r}{2}$, farà pure $a^3 - \frac{a^3}{9}$, cioè $\frac{8a^3}{9} = \frac{r}{4}$; $4ga = 7r$, $a = \frac{7r}{4g}$; $a^3 = \frac{343r^3}{64g^3}$, e $\frac{343r^3}{64g^3}$ farà $= \frac{9r}{16}$; e quindi $343r^3 = 36g^3$, o pure $\frac{r^3}{36} = \frac{g^3}{343}$.

3 Avendosi pure un metodo di estrarre la radice quadrata

binomia da un qualunque binomio, come $\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4}$: pa-

re, che paragonandosi essa radice termine per termine, con $3a^2c - c^3$, radice del quadrato $9a^4c^2 - 6a^3c^3 + c^6 =$

$\frac{q^1}{27} = \frac{r^2}{4}$, si possano trovare i valori di a , e di c ; e

quindi sciorisi la difficoltà: di modo che, se essa radice binomia sia $m - n$, ella certamente farà $= 3a^2c - c^3$; onde ponendosi $3a^2c = m$, debba essere $c^3 = n$; quindi avreb-

befi $\frac{m}{3a^2} = c$, ed $\frac{m^3}{27a^6} = c^3 = n$, ed ancora $a^6 = \frac{m^3}{27n}$;

perciò $a^3 = \frac{m}{3 \sqrt[3]{n}}$, ed $a = \sqrt[3]{\frac{m}{3n}}$: ma il paragonarsi

$\sqrt[n]{a^m c} = c^{1/n}$ colla radice binomia $m - n$, equivalendo al pa-

D d

ragionaſi $9a^2c^2 - 6a^2c^2 + c^2$ con $\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4}$. Giuſta il metodo della eſtrazione della radice binomia, dovrà porſi la ſomma dei quadrati $9a^2c^2 + c^2 = \frac{q^2}{27}$, e $-6a^2c^2 = -\frac{r^2}{2}$.

Per altra parte eſſendo veramente $\frac{r^2}{4} = a^2 - 6a^2c^2 + 9a^2c^2$, dovrà queſto eſſere $= 6a^2c^2$, e quindi $a^2 - 3ac^2 = ac^2 \sqrt{6}$, ed $a^2 - 3c^2 = c^2 \sqrt{6}$, e finalmente $a^2 = c^2 \sqrt{3 + \sqrt{6}}$; onde $a^2 : c^2 :: \sqrt{3 + \sqrt{6}} : 1$, o pure, perchè $a^2 - 3ac^2 = \frac{r^2}{2}$, avrebbefi $\frac{r^2}{2} = ac^2 \sqrt{6}$. Dalla prima di queſte ricavafi $c^2 = \frac{a^2}{3 + \sqrt{6}}$, e dalla ſeconda ricavafi $c^2 =$

$$\frac{r}{2a\sqrt{6}}, \text{ e però } \frac{a^2}{3 + \sqrt{6}} = \frac{r}{2a\sqrt{6}}; \text{ onde faſſi } a^2 = \frac{r \times \sqrt{3 + \sqrt{6}}}{2\sqrt{6}};$$

ma, ſe ſia $a^2 - 6a^2c^2 + 9a^2c^2 = 6a^2c^2$, dovrà eſſere ancora $a^2 - 6a^2c^2 + 3a^2c^2 = 0$, e dividendo per a^2 , farà $a^2 - 6a^2c^2 + 3c^2 = 0$, o pure $a^2 + 3c^2 = 6a^2c^2$, dove in

$$\text{luogo di } c^2, \text{ e di } 3c^2, \text{ ponendofi } \frac{r}{2a\sqrt{6}}, \text{ e } \frac{3r^2}{24a^2} \text{ faſſi } a^2 + \frac{3r^2}{24a^2} = \frac{6a^2r}{2a\sqrt{6}} = \frac{3ar}{\sqrt{6}}. \text{ Moltiplicando per } a^2, \text{ farà } a^4$$

$$+ \frac{3r^2}{24} = \frac{3a^2r}{\sqrt{6}}, \text{ od ancora } a^4 - \frac{3ra^2}{\sqrt{6}} + \frac{r^2}{8} = 0, \text{ da}$$

$$\text{cui ricavafi } a^2 = \frac{3r}{2\sqrt{6}} + \frac{r}{2}; \text{ ma poco ſopra aveafi } a^2 = \frac{r \times (3 + \sqrt{6})}{2\sqrt{6}}; \text{ dunque farà ancora } \frac{3r}{2\sqrt{6}} + \frac{r}{2} =$$

$\frac{r\sqrt{3 + \sqrt{6}}}{2\sqrt{6}}$; moltiplicando per $2\sqrt{6}$, trovasi $3r + r\sqrt{6} =$

$3r + r\sqrt{6}$; cioè, qui non havvi contraddizione, od impossibilità veruna, e però codesta supposizione può essere talvolta vera. Ella però è generalmente falsa, nè si verifica, che nel caso di $a^6 - 6a^3c^3 + 3a^2c^4 = 0$, o sia di $a^6 - 6a^3c^3 + 3c^6 = 0$, od anche di $a^3 + 3c^3 = 6a^3c^3$: poichè

sottrando dal cubo $a^6 + 3a^3c^3 + 3ac^6 + c^6 = \frac{q^3}{27}$ li due

quadrati $9a^3c^3 + c^6$; e dal quadrato $a^6 - 6a^3c^3 + 9a^2c^4$

$= \frac{r^2}{4}$: sottrando $6a^3c^3$, hassi lo stesso residuo $a^6 - 6a^3c^3 +$

$3a^2c^4$; onde quel cubo, e quel quadrato sono quantità equi-

differenti, come $9a^3c^3 + c^6$, ed il prodotto $6a^3c^3$, trovan-

dosi in ambe le parti la differenza $= \frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}$. Dunque

per la quantità medesima $a^6 - 6a^3c^3 + 3a^2c^4$, sono mag-

giori li termini $\frac{q^3}{27}$, e $\frac{r^2}{4}$ dei termini $9a^3c^3 + c^6$, e $6a^3c^3$;

e quindi ciascun termine della radice binomia $m - n$, è al-

tresi maggiore di ciascun termine della radice binomia $3a^3c - c^3$, sebbene ancora sieno equi-differenti esse radici, co-

mechè $= \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}$.

Per conoscere quando possa farsi cotale supposizione, e però sia algebricamente riducibile per questa via la proposta equazione: si osservi, che supponendo la radice binomia $m - n$ uguale termine a termine alla radice $3a^3c - c^3$, si

trovò $a^6 = \frac{m^3}{27n}$; e dalla supposizione equivalente di $9a^3c^3 + c^6$

D d 2

$= \frac{q^2}{27}$, e di $6a^2c^2 = \frac{r^2}{2}$, si trovò $a^2 = r \times \frac{3+\sqrt{6}}{24}$, e

però $a^2 = r^2 \times \frac{15+6\sqrt{6}}{576}$. Dunque farà $\frac{m^2}{27n} = r^2 \times$

$\frac{15+6\sqrt{6}}{576}$, o pure $27nr^2 \times (15+6\sqrt{6}) = 576m^2$, e di-

videndo per 9, avrassi $3nr^2 \times (15+6\sqrt{6}) = 64m^2$, quale uguaglianza indicherà la possibilità della supposizione; altrimenti essa sarà falsa.

14 Facciamo ora particolare attenzione alla ragione di

$\frac{q^2}{27}$ al $\frac{r^2}{4}$, e si noti, che quando $\frac{q^2}{27} = \frac{r^2}{4}$, fatti allora

$\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4} = 0$; e perciò ancora $3a^2c - c^3 = 0$; ma $3a^2 - c^2$

non può farsi $= 0$, perchè farebbesi ancora $3a^2 = c^2$; sarà dunque c , e conseguentemente ancora $b = 0$; onde

$a^2 = \frac{q}{3}$, $a = \frac{r}{2}$; $a = \frac{3r}{q}$, $= \sqrt{\frac{r}{2}}$, $= \sqrt{\frac{q}{3}}$, e

$2a = 2\sqrt{\frac{q}{3}} = \sqrt{\frac{q}{3}} + \sqrt{\frac{q}{3}}$, cioè in questo caso, le

due metà della radice $2a$, divengono le sottese dei due qua-

dranti nel mezzo circolo, il cui diametro sia $= \sqrt{\frac{2q}{3}}$, o

il raggio $= \sqrt{\frac{q}{6}}$.

Se poi fosse $\frac{q^2}{27} = \frac{r^2}{2}$, cioè $\frac{2q^2}{27} = r^2$, farà ancora

$\frac{r}{2} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}$, cioè $a^2 - 3ac = 3a^2c - c^2$; e

quindi $a^2 + c^2 = 3a^2c + 3ac^2$, ove dividendo per $a + c$, trovasi $a^2 - ac + c^2 = 3ac$; e però $a^2 + c^2 = 4ac$; ma

$a^2 + c^2 = \frac{q}{3}$, dunque $4ac = \frac{q}{3}$, e $2ac = \frac{q}{6}$; onde

il quadrato $a^2 + 2ac + c^2 = \frac{q^2}{3} + \frac{q}{6} = \frac{q}{2}$, ed il

quadrato $a^2 - 2ac + c^2 = a^2 - 2ac + c^2 = \frac{q}{3} - \frac{q}{6} = \frac{q}{6}$.

Estraendo in queste equazioni da ambe le parti la radice quadrata, si ha dalla prima $a + c = \sqrt{\frac{q}{2}}$; e dalla seconda $a - c = \sqrt{\frac{q}{6}}$, e la somma $2a$, cioè $x = \sqrt{\frac{q}{2}} + \sqrt{\frac{q}{6}}$. Dunque in questo caso la parte maggiore $a + c$ della radice $2a$ diventa la sottesa di un arco di 120. gradi, e la parte minore $a - c = \sqrt{\frac{q}{6}}$ diventa la sottesa di 60. gradi nel mezzo circolo, il cui diametro $= \sqrt{\frac{2q}{3}}$, od il raggio $= \sqrt{\frac{q}{6}}$, e farà ancora $\sqrt{\frac{q}{2}} : \sqrt{\frac{q}{6}} :: \sqrt{3} : 1$.

In altri casi potrà essere $\frac{r}{2}$ maggiore, o minore di $\sqrt{\left(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4}\right)}$, e conoscerassi la loro differenza, che si

dica $= d$, acciò sia $\frac{r}{2} = \sqrt{\left(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4}\right) \pm d}$; così farà ancora $a^3 - 3ac^2 = 3a^2c - c^3 \pm d$, ed $a^3 + c^3 \mp d = 3a^2c + 3ac^2$, dividendo per $a + c$, avrassi $a^2 - ac + c^2 \mp \frac{d}{a+c} = 3ac$, ed anche $a^3 + c^3 \mp \frac{d}{a+c} = 4ac$;

quindi $\frac{q}{3} \mp \frac{d}{a+c} = 4ac$, e $\frac{q}{6} \mp \frac{\frac{1}{2}d}{a+c} = 2ac$.

Dunque il quadrato $a^2 + 2ac + c^2$ farà uguale $\frac{q}{2} \mp \frac{\frac{1}{2}d}{a+c}$; ed il quadrato $a^2 - 2ac + c^2$ farà uguale $\frac{q}{6} \mp \frac{\frac{1}{2}d}{a+c}$, e però $a + c = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{\frac{1}{2}d}{a+c}\right)}$, ed $a - c = \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{\frac{1}{2}d}{a+c}\right)}$, e sommando farassi $2a$, cioè $x = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{\frac{1}{2}d}{a+c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{\frac{1}{2}d}{a+c}\right)}$.

Ma la somma dei due quadrati essendo sempre uguale $\frac{2q}{3}$. Dunque la radice ricercata $2a$ viene esattamente rappresentata dalla somma delle sottese di due archi componenti un semi-circolo, il cui raggio è uguale a $\sqrt{\frac{q}{6}}$.

Del semi-circolo ADB sia il diametro AB ($f_3, 1.$) $= \sqrt{\frac{2q}{3}}$.

Già quando l'ultimo termine r della equazione ha il massimo suo

valore rispetto a $\frac{q^2}{27}$; cioè quando $\frac{r^2}{4} = \frac{q^2}{27}$, la radice $2a$, dividefi nelle due parti uguali a , a , ciascuna delle quali è uguale $\sqrt{\frac{q}{3}}$, e sono le sottese dei due quadranti dello stesso semicircolo. Quando poi r ha il menomo suo valore, cioè quando $\frac{r^2}{4} = \frac{q^2}{27}$, o sia $r^2 = \frac{2q^2}{27}$, la radice $2a$ dividefi in due parti disuguali, delle quali la maggiore $a + c$ è la sotessa AE dell' arco di gradi 120., essendo $= \sqrt{\frac{q}{2}}$; e la minore $a - c$ è la sotessa EB dell' arco di 60. gradi, essendo uguale al raggio $\sqrt{\frac{q}{6}}$ del semi-circolo. In qual caso il punto E dista dal grado nonagesimo, per un arco di gradi 30; ma quando r , e conseguentemente $\frac{r^2}{4}$, diventa nullo, o sia quando $\frac{q^2}{27}$ rispetto al r^2 diventa infinito, allo-

ra il punto d' inflessione, che distingue le due parti della radice $2a$, cade in F distante dal grado nonagesimo D , per un arco di gradi 60., o dalla origine B , per un arco di gradi 30., cioè la parte maggiore $a + c$ della radice $2a$ diventa $=$ alla sotessa di gradi 150., e la minore $a - c$, la sotessa di gradi 30.: il che così si dimostra.

- 15 Quando $r = 0$, l' equazione $x^3 - qx - r = 0$, diventa $x^3 = q$, ed $x = \pm \sqrt[3]{q}$; ma allora falsi $r = 0$, quando la radice minima diviene nulla rispetto alle altre, in qual caso la differenza $2b$ diventa $= 2a$, ed $a = b$; ma $b : c : \pm \sqrt[3]{3} : 1$; perchè per l' ipotesi $b^2 = 3c^2$. Dunque

ancora $a : c :: \sqrt{3} : 1$, ed $a + c : a - c :: \sqrt{3} + 1 : \sqrt{3} - 1$. Dividasi poi l'arco EB per mezzo in F , e tirisi la sottesa AF di gradi 150., e la sottesa FB di gradi 30. Sarà per la settima del 6° di Euclide, $AB : AE :: BG : GE$; alternando $AB : BG :: AE : GE$, e la somma degli antecedenti $AB + AE$ alla somma dei conseguenti BE , come $AB : BG$; ma nei triangoli simili ABF , BFG , sta $AB : BG :: AF : FB$; dunque $AB + AE : BE :: AF : FB$. Ora ponendosi il raggio $= 1$, farà il diametro $= 2$, la sottesa $AE = \sqrt{3}$; e però $AB + AE : BE$, o sia $AF : FB :: 2 + \sqrt{3} : 1$; ma $2 + \sqrt{3} : 1 :: \sqrt{3} + 1 : \sqrt{3} - 1$; poichè fatti dagli estremi, e dai medii lo stesso prodotto $= 1 + \sqrt{3}$. Dunque $AF : FB :: \sqrt{3} + 1 : \sqrt{3} - 1$, cioè come la parte maggiore $a + c$ della radice $2a$ alla minore $a - c$, in quel caso, che manca l'ultimo termine r . Dunque nel caso di $r = 0$, la mezza circonferenza dividefi nel punto F in due archi, l'uno ADF di gradi 150., e l'altro FB di gradi 30.; il che doveasi dimostrare.

Ora essendo $AF : FB :: \sqrt{3} + 1 : \sqrt{3} - 1$, farà $\overline{AF} : \overline{FB} :: 4 + 2\sqrt{3} : 4 - 2\sqrt{3}$, ed $\overline{AF} + \overline{FB} : \overline{AF} :: 8 : 4 + 2\sqrt{3}$; ma $\overline{AF} + \overline{FB} = \frac{2q}{3}$; dunque $\frac{2q}{3} : \overline{AF} :: 8 : 4 + 2\sqrt{3}$; quindi $\overline{AF} = \frac{q}{3} + \frac{q\sqrt{3}}{6}$, ed

AF , cioè la sottesa di gradi 150., farà $= \sqrt{(\frac{q}{3} + \frac{q\sqrt{3}}{6})}$, e

la sottesa FB di gradi 30., farà $= \sqrt{(\frac{q}{3} - \frac{q\sqrt{3}}{6})}$. Dun-

que $AF + FB$, cioè le due parti $a + c$, ed $a - c$ della radice $2a$, o pure x , farà $= \sqrt{(\frac{q}{3} + \frac{q\sqrt{3}}{6})} +$

$\sqrt{(\frac{q}{3} - \frac{q\sqrt{3}}{6})}$

$\sqrt{\left(\frac{q}{3} - \frac{q\sqrt{3}}{6}\right)}$; la somma delle quali è appunto $= \sqrt[2]{q}$,

siccome esser dee nella equazione $x^2 = q$.

Premesse queste cose: dunque quando $\frac{r^2}{4} = \frac{q^2}{27}$, la metà

a della radice 2a fatti $= \frac{\sqrt{q}}{3}$; e quando $\frac{r^2}{2} = \frac{q^2}{27}$, la

parte maggiore a + c della stessa radice fatti $= \frac{\sqrt{q}}{2}$; dun-

que quando $\frac{r^2}{2}$ farà maggiore di $\frac{q^2}{27}$, la parte maggiore

a + c troverassi fra i limiti $\sqrt{\frac{q}{3}}$, e $\sqrt{\frac{q}{2}}$, quei limiti sono fra di loro come $\sqrt{2}$ al $\sqrt{3}$, o sia prossimamente come 9. all' 11.

Così pure, poichè quando $\frac{r^2}{2} = \frac{q^2}{27}$, fatti a + c $= \sqrt{\frac{q}{2}}$; quando $r = 0$, fatti a + c $= \sqrt{\left(\frac{q}{3} + \frac{q\sqrt{3}}{6}\right)}$.

Dunque quando $\frac{r^2}{2}$ farà minore di $\frac{q^2}{27}$, la parte a + c cadrà tra i limiti $\sqrt{\frac{q}{2}}$, e $\sqrt{\left(\frac{q}{3} + \frac{q\sqrt{3}}{6}\right)}$, i quali so-

no fra di loro :: $\sqrt{3} : \sqrt{(2 + \sqrt{3})}$, o prossimamente, come 10 all' 11. Altri limiti più ristretti possono nella stessa maniera ritrovarsi, questi però bastano all' intento.

Se centro in A col raggio AE (fig. 2.) = alla sottratta di gradi 120, descrivasi il circolo EEE, farà $\overline{AE} = \overline{AD} =$

$\frac{\frac{1}{2}d}{a+c} = \frac{q}{6}$; e di là innanzi la frazione $\frac{\frac{1}{2}d}{a+c}$ farassi con-

E c

tinuamente minore tendendo da D verso E , e sparirà affatto nel punto E del grado sessagesimo dall'origine B , oltre al quale di nuovo crescerà continuamente fino a che divenga massima nel punto F del grado trigesimo, dove $\overline{AF} = \overline{AE} = \frac{q\sqrt{3}-1}{6}$.

Uso di questi limiti nella risoluzione delle equazioni.

¹⁶Essendo $a+c = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{\frac{1}{2}d}{a+c}\right)}$: nella frazione $\frac{\frac{1}{2}d}{a+c}$, in luogo del denominatore $a+c$, scrivasi il limite più prossimo, che dicasi $= l$. Se la frazione avrà avanti di se il segno $-$, e siati sostituito il limite maggiore, sarà veramente $\sqrt{\left(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l}\right)}$, alquanto maggiore di $a+c$; ma ad esso avvicinerassi assai più dello stesso limite. Ma se si sostituisca il minor limite, sarà anche $\sqrt{\left(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l}\right)}$ minore di $a+c$, ma ad esso avvicinerassi assai più, che lo stesso limite minore. Succederà il contrario, quando la frazione $\frac{\frac{1}{2}d}{a+c}$ farà affetta del segno $+$. E se in luogo del limite, si sostituirà nella frazione medesima il valore più prossimo già ritrovato, farassi vieppiù prossimo al giusto il nuovo valore, e così di seguito all'infinito: poichè allora esattamente $x = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l}\right)} + \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l}\right)}$.

Per altro, dopo una, o due di tali sostituzioni, troverassi un tale valore della radice ricercata $2a$, che in pratica potrà considerarsi come esatto, come già a questo proposito si espresse il chiarissimo Dottore Gabriello Manfredi; imperciocchè quell' eccesso, o difetto, che troverassi nel valore di $a + c$, verrà pressochè distrutto per l' opposto difetto, od eccesso del valore di $a - c$, a cagione dei segni contrarii,

co' quali viene affetta la frazione $\frac{d}{2l}$ nei quadrati delle parti

$a + c$, ed $a - c$, oltre ad altre avvertenze, che adoperare si possono per rendere più pronta l' approssimazione, e quali lascio all' avvedutezza dell' algebrista.

Trovata poi l' espressione reale della radice $2a$, facilmente trovansi le espressioni reali delle due radici rimanenti. Per esempio, se sia positiva la radice $2a$, e perciò negati-

ve le due radici rimanenti. Avendosi $2a = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l}\right)}$

$+ \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l}\right)}$, avrassi $a = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l}\right)} +$

$\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l}\right)}$; ma $a + c = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l}\right)}$, ed a

$- c = \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l}\right)}$, colla sottrazione avrassi $2c =$

$\left(\sqrt{\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l}}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l}\right)}$; e quindi $c = \frac{1}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l}\right)} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l}\right)}$; ma $c \vee_3 = b$,

femi-differenza delle due radici minori; dunque $b =$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\frac{q}{6} \mp \frac{d}{2l})} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l})}$. Quindi le espressioni reali delle tre radici faranno

$$\text{di } 2a = \sqrt{(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l})} + \sqrt{(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l})},$$

$$\text{di } -a-b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sqrt{(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l})} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sqrt{(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l})},$$

$$\text{e di } -a+b = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sqrt{(\frac{q}{2} \mp \frac{d}{2l})} - \frac{1-\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\frac{q}{6} \pm \frac{d}{2l})}.$$

Quale approssimazione si faccia colla successiva sostituzione dei limiti facilmente si comprenderà se si consideri la ragione, che passa tra essi, cioè tra $\sqrt{\frac{q}{2}}$, e $\sqrt{\frac{q}{4}}$, o sia prossimamente tra 9 e l'11; e tra i limiti $\sqrt{\frac{q}{2}}$, e $\sqrt{(\frac{q}{3} + \frac{q\sqrt{3}}{6})}$, o sia prossimamente tra 10. e 11. Per il che, se la frazione $\frac{\frac{1}{2}d}{a+c}$, posta fra i due limiti tra di loro più lontani, abbia il suo massimo valore $\frac{q}{6}$; sostituendo in essa il valore del limite più remoto $\sqrt{\frac{q}{3}}$, l'eccesso del limite sopra il giusto valore di $a+c$ diminuirà per caduna sostituzione prossimamente nella ragione del 9 al 2, e se la frazione medesima posta fra i limiti più ristretti, abbia il suo massimo valore, cioè sia $= \frac{q\sqrt{3}-1}{6}$: sostituendo in essa il limite più remoto $\sqrt{\frac{q}{2}}$: il difetto del limite sopra il giusto valore di

$a + c$, diminuirà per ciascuna sostituzione prossimamente nella ragione del 10. all'1. Non avrà però mai detta frazione il massimo valore: perchè allora l'equazione non sarebbe del terzo, ma bensì del secondo grado, come si provò al n. 15. Dunque l'eccesso, o il difetto dei limiti per ciascuna sostituzione diminuirà in una ragione sempre maggiore del 9 al 2, o dal 10 all'1, secondo che il giusto valore di $a + c$ sarà meno, o più lontano dal limite adoperato.

Quindi cotale eccesso, o difetto prestamente farsi minore di ogni quantità assegnata, per la prop. 1. del lib. 10. di Euclide. Intanto ad ottenersi un valore praticamente giusto della ricercata radice, non si abbisogna di molte sostituzioni: imperciocchè, come notossi superiormente l'eccesso, od il difetto, che troverassi nella prima parte della radice, cioè nella espressione di $a + c$, verrà compensato dal contrario difetto, o dall'eccesso della seconda parte $a - c$.

E perchè le differenze dei lati nei quadrati minori sono rispettivamente maggiori, che nei quadrati maggiori; quindi,

se la frazione $\frac{1}{2}d$, nel maggiore quadrato, sia affetta dal

segno $-$, il valore di x ritrovato colla sostituzione del limite maggiore, sarà alquanto minore del giusto, e per la sostituzione del limite minore, sarà qualche poco maggiore del giusto. Succederà il contrario, quando detta frazione sarà affetta dal segno $+$, o pure nel primo caso, se nella medesima frazione del minore quadrato, si sostituisca il limite già approssimato, ne verrà il valore di x qualche poco maggiore del giusto colla sostituzione del limite maggiore, o qualche poco minore del giusto colla sostituzione del limite minore, ed all'opposto nel secondo caso, quando detta frazione sarà affetta del segno $+$.

E S E M P I O.

Sia l'equazione numerica $x^2 - 78x - 120 = 0$, in cui la radice positiva $2a$ è $= 10$, la maggiore delle negative $= -5 - \sqrt{3}$, e la minore $= -5 + \sqrt{3}$; farà dunque

$$q = 78; \frac{q}{2} = 39; \frac{q}{3} = 26; \text{ e } \frac{q}{6} = 13.$$

Sarà pure $r = 120$, $\frac{r}{2} = 60$, e $\sqrt{(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4})}$
 $= 74$; la differenza d tra $\frac{r}{2}$, e $\sqrt{(\frac{q^2}{27} - \frac{r^2}{4})} = 36$,
 $\frac{1}{2}d = 18$; ma perchè $\frac{r^2}{2} = 24100$ è maggiore di $\frac{q^2}{27} =$
 17576 , la parte maggiore $a + c$ della radice cadrà tra i
 limiti più dilatati $\sqrt{\frac{q}{3}} = \sqrt{26}$, e $\sqrt{\frac{q}{2}} = \sqrt{39}$, per il
 n. 15.; quindi per la sostituzione del limite minore $\sqrt{26}$,
 avrassi $x = \sqrt{(39 - \frac{18}{\sqrt{26}})} + \sqrt{(13 + \frac{18}{\sqrt{26}})}$ insensibil-
 mente maggiore di 10.

Ed adoperandosi il limite maggiore $\sqrt{39}$, avrassi $x =$
 $\sqrt{(39 - \frac{18}{\sqrt{39}})} + \sqrt{(13 + \frac{18}{\sqrt{39}})}$, insensibilmente mi-
 nore di 10.

Ritenendosi il limite maggiore, farà la maggiore radice
 negativa $= -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \sqrt{(39 - \frac{18}{\sqrt{39}})} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 $\sqrt{(13 + \frac{18}{\sqrt{39}})} = -5 - \sqrt{3}$, e la radice minore negativa

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sqrt{39 - \frac{18}{\sqrt{39}}} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \sqrt{13 + \frac{18}{\sqrt{39}}} \\ = -5 + \sqrt{3}.$$

Dove s'è manifesto, che se alcuna delle radici sarà razionale, ella sarà necessariamente quel numero razionale, a total espressione più vicino.

Renderassi più sensibile l'accuratezza di questo metodo, se nello stesso esempio in luogo de' veri limiti si sostituiscono altri anche da essi assai rimoti, per esempio, se in vece del limite maggiore $\sqrt{39}$ si adopera il numero intero 9,

$$\text{troverassi } x = \sqrt{39 - \frac{18}{9}} + \sqrt{13 + \frac{18}{9}} = \sqrt{37}$$

+ $\sqrt{15}$ di poco minore del 10; così, se in vece del limite minore $\sqrt{16}$ si sostituisca il numero intero 3, troverassi

$$x = \sqrt{39 - \frac{18}{3}} + \sqrt{13 + \frac{18}{3}} = \sqrt{33} + \sqrt{19}$$

di poco maggiore del 10. Dunque, se tale approssimazione ottienfi con limiti cotanto lontani dai prescritti, assai più giusto sarà il valore, che otterrassi cogli stessi limiti, o con altri meno da essi lontani, come se in vece di $\sqrt{39}$ si adopera il numero intero 6, o pure il numero intero 5, col

$$\text{primo di questi trovasi } x = \sqrt{39 - \frac{18}{6}} + \sqrt{13 + \frac{18}{6}}$$

$$= \sqrt{36} + \sqrt{16} = 6 + 4 = 10, \text{ cioè il giusto suo va-}$$

$$\text{lore; e coll'altro trovasi } x = \sqrt{39 - \frac{18}{5}} + \sqrt{13 + \frac{18}{5}}$$

$$= \sqrt{35 \frac{2}{5}} + \sqrt{16 \frac{3}{5}} \text{ di poco maggiore del 10.}$$

Una cotanta approssimazione al giusto valore della radice ricercata, che non ci obbliga a valerci degli stessi limiti, facilita sommamente l'uso della proposta formola, come si

è potuto osservare nel precedente esempio; ed ancora nel seguente preso in una equazione non nata dalla moltiplicazione di equazioni lineari, $x^3 - 30x - 50 = 0$, in cui ben si conosce, che il valore della radice positiva deve essere di poco maggiore del 6.

$$\text{Essendo ivi } q = 30, r = 50, \text{ trovasi } \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)}$$

$= \sqrt{375}$ prossimamente $= 19$; e perchè $\frac{r}{2}$, cioè 25 è maggiore del 19, la parte maggiore $a + c$ della radice cadrà tra i limiti $\sqrt{\frac{q}{2}}$, e $\sqrt{\frac{q}{3}}$, cioè tra $\sqrt{15}$, e $\sqrt{10}$; e la differenza d tra $\frac{r}{2}$, e $\sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)}$ farà $= 6$, prendendosi per limite il 3, fassi $\frac{d}{2l} = \frac{6}{6} = 1$.

Quindi $a + c = \sqrt{\left(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l}\right)}$ farà $= \sqrt{(15 - 1)}$
 $= \sqrt{14}$, e la parte minore $a - c = \sqrt{\left(\frac{q}{6} + \frac{d}{2l}\right)}$,
 farà $= \sqrt{(5 + 1)} = \sqrt{6}$, e però $2a$, cioè $x = \sqrt{14} + \sqrt{6} = 3.74'' + 2.45'' = 6.19''$.

La maggiore delle due radici negative $-a - b = -$
 $\frac{\sqrt{3-1}}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l}\right)} + \frac{\sqrt{3-1}}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{6} + \frac{d}{2l}\right)}$,

$$\text{farassi} = -\frac{\sqrt{3-1}}{2} \times 3.74'' + \frac{\sqrt{3-1}}{2} \times 2.45''.$$

E la minore radice negativa $-a + b$, cioè $+$
 $\frac{\sqrt{3-1}}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l}\right)} - \frac{\sqrt{3-1}}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{6} + \frac{d}{2l}\right)}$,
 farassi

$$\text{faraffi} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times 3 \cdot 74'' - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times 2 \cdot 45'', \text{ la}$$

$$\text{somma delle quali} = -3 \cdot 74'' - 2 \cdot 45'' = -6 - 19''.$$

Così pure in qualunque altra equazione, come $x^2 - 39x - 78 = 0$, dove $q = 39$, $r = 78$, e quindi

$$\sqrt{\left(\frac{q^2}{27} - \frac{r^3}{4}\right)} = 26, \text{ minore di } \frac{r}{2}, \text{ cioè di } 39, \text{ per } 13,$$

$$\text{farà } d = 13, \text{ ed i limiti sono } \sqrt{19 \frac{1}{2}}, \text{ e } \sqrt{13}; \text{ se prendasi}$$

$$\text{per limite il } 4, \text{ faraffi } \frac{d}{2l} = \frac{13}{8} = 1 \frac{5}{8}, \text{ e però}$$

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l}\right)} = \sqrt{17 \frac{7}{8}}, \text{ e } \sqrt{\left(\frac{q}{6} + \frac{d}{2l}\right)} = \sqrt{5 \frac{1}{8}},$$

$$\text{che insieme danno il valore della radice positiva} = \sqrt{17 \frac{7}{8}}$$

$$+ \sqrt{5 \frac{1}{8}} = 4 \cdot 22' + 2 \cdot 26'' = 6 + \frac{48}{100}.$$

E poichè i coefficienti $\pm \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, che accompagnano

le parti componenti le altre due radici, sono in tutti i casi sempre gli stessi, essi possono determinarsi coll'esattezza, che si desidera nel dato caso, per esempio $\sqrt{3}$ potrà prenderfi

$$= 1 \cdot 73'', \text{ ed } 1 = 1 \cdot 00'', \text{ e però } \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0 \cdot 37'',$$

$$\text{e } -\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1 \cdot 37''.$$

Quindi le radici negative per questo esempio saranno l'una $= -1 \cdot 37'' \times 4 \cdot 22'' + 37' \times 2 \cdot 26'' = -4 \cdot 9452''$, e l'altra farà $= +37'' \times 4 \cdot 22'' - 237'' \times 2 \cdot 26'' = -1 \cdot 3348''$; la somma delle quali appunto $= -6 \cdot 48''$.

F f

Se fino ad ora siasi trovato presso alcuno scrittore qualche cosa a questa somigliante in questo particolare argomento, io no'l so, e ne lascio agli studiosi la ricerca, e lo esame. Penso non esservi bisogno di esempio per la costruzione geometrica di questa formola, mentre ella non richiede, che il circolo, e la linea retta.

Se vogliansi rapportare al circolo le equazioni dell' uno, e dell' altro caso: osserverassi questa differenza, cioè, che nelle equazioni del primo caso; la radice reale $2a$ diventa diametro del circolo, ed è diviso in parti disuguali $a + c$, ed $a - c$, delle quali sono dati i cubi, cioè $a^3 + 3a^2c$

$$+ 3ac^2 + c^3 = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} \pm \frac{r^3}{4}\right)}, \text{ ed } a^3 - 3a^2c +$$

$$3ac^2 - c^3 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} \pm \frac{r^3}{4}\right)}, \text{ ed in oltre è dato}$$

il rettangolo $a^2 - c^2 = \frac{q}{3}$, fatto da esse; talmente che

$\sqrt{\frac{q}{3}}$ sia l'ordinata nel punto del segamento; ma nelle

equazioni del secondo caso, il diametro del circolo è uguale

$\sqrt{\frac{2q}{3}}$, e la radice $2a$ è la somma delle sottese di due ar-

chi componenti la mezza circonferenza, delle quali sono dati

$$\text{i solidi informi } a^3 + 3a^2c - 3ac^2 - c^3 = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)},$$

$$\text{ed } a^3 - 3a^2c - 3ac^2 + c^3 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}\right)},$$

nati dalla moltiplicazione di $a^2 + 4ac + c^2$ per $a - c$, e di $a^2 - 4ac + c^2$ per $a + c$, dov'è data la somma dei

$$\text{quadrati } a^2 + c^2 = \frac{q}{3}.$$

Quantunque i coefficienti numerici misti di frazioni, e di radicali non facciano grande difficoltà ad un algebrista. Tuttavia accennerò qui solamente, per sollievo di chi fosse meno versato nel maneggiare simili quantità, che dicendosi il raggio di un circolo $= 1$, od il diametro $= 2$, la sottesa del quadrante sarà $= \sqrt{2}$, quella di 120 gradi sarà $= \sqrt{3}$, quella di 150 gradi sarà $= \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, quella di gradi 30 $= \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; con quali, mediante il metodo del n. 15 possono trovarsi le espressioni delle sottese degli archi provenienti dalla suddivisione in due, o dalla duplicazione di alcuno di quelli, de' quali saranno trovate, o saranno date le corde: sapendosi ancora, che il segno radicale quadratico sempre esprime una quantità media geometrica tra due altre.

*Uso delle tavole dei seni nella risoluzione
di questa sorta di equazioni.*

- 17 **I**L problema della trisezione dell'angolo, porta naturalmente, siccome è noto, a queste equazioni: poichè chiamandosi a il raggio AC (fig. 3.) del circolo $AEBF$, $2b$ la sottesa data AE dell'arco da trisecarsi, ed x la sottesa AD della sua terza parte, trovasi l'equazione $x^3 - 3a^2x + 2a^2b = 0$. Dove la radice massima, e negativa AH sottende la terza parte della somma di tutta la circonferenza, e dell'arco AE da trisecarsi; la radice positiva maggiore AF sottende la terza parte dell'arco, che col dato AE compie la circonferenza, e la radice positiva minore si è la AD ricercata, che sottende la terza parte dell'arco AE , quali cose dimostransi comunemente da scrittori di algebra, e sono con particolare chiarezza esposte nel lib. 2., sez. 3., c. 4. degli elementi di algebra dal celebre Nicolò de Martino.

Se si paragoni questa formola colla generale $x^3 - qx$

$$\pm r = 0, \text{ trovasi } a^2 = \frac{q}{3}, a = \sqrt{\frac{q}{3}}, 2a^2b = r,$$

Ff 2

$ab = \frac{r}{aa} = \frac{3r}{q}$; quindi, essendo il raggio $a = \sqrt{\frac{q}{3}}$,

farà la sottesa $\frac{3r}{q}$, quella dell'arco AE , che dovrebbe di-

videre in tre parti uguali, e perciò esso arco farà dato in gradi, e minuti per le tavole dei seni. Dunque, se esso arco conosciuto in gradi, e minuti, dicasi $= 6n$, e la lettera S dinoti il seno di un angolo qualunque, farà la radice massima negativa, cioè la sottesa AH . . . $2S$ gr. $60 + n$
 la maggiore positiva AF . . . $2S$ gr. $60 - n$
 la minore positiva AD . . . $2S$ gr. n
 o pure, se per S dinotisi la sottesa di un qualunque arco: farà la radice massima negativa $AH = S$ gr. $120 + 2n$
 la maggiore positiva . . . S gr. $120 - 2n$
 la minore positiva . . . S gr. $2n$
 dunque nelle equazioni numeriche avranno le espressioni di

ciascuna delle tre radici reali date per $\sqrt{\frac{q}{3}}$, e qualche altro coefficiente numerico.

OSSERVAZIONI.

L'arco dato $6n$ essendo minore della mezza circonferenza, la sua terza parte $2n$ farà minore di gradi 60 , conseguentemente la radice massima $= S$ gr. $120 + 2n$, farà minore del diametro $= 2\sqrt{\frac{q}{3}}$; e quando il raggio del circolo si pone $= \sqrt{\frac{q}{6}}$, la medesima radice massima ($n. 14$) farà la somma delle sottese dei due quadranti, cioè $= 2\sqrt{\frac{q}{3}}$; e però l'equazione non è del terzo grado; ma del secon-

do; ed il punto della inflessione cade nel grado nonagesimo; ed il menomo valore della stessa radice massima, nella prima posizione, si ha, quando $6n = 0$; e però diventa la sottela di 120 gradi, ove neppure l'equazione passi del terzo grado, ma del secondo; e nella posizione seconda, il punto d'inflessione cade nel grado sessagesimo dal vertice, o trigesimo dall'origine. Dunque il luogo di tutte esse radici

massime, quando il raggio si pone $= \sqrt{\frac{q}{3}}$, e nell'arco posto

fra i gradi 120, e 180; e nella seconda, il luogo dei punti d'inflessione, e l'arco posto fra il 90, e 150 gr., cioè nell'una, e nell'altra posizione il luogo in cui termina, o in cui ripiegasi la radice massima, è sempre un arco di 60 gradi in

ciascuno dei cerchi del raggio $= \sqrt{\frac{q}{3}}$, o del raggio $= \sqrt{\frac{q}{6}}$.

Nella formola $x^3 - qx + r = 0$.^{23.} Comunque varino il coefficiente q , e l'ultimo termine r , rappresenterannosi tuttavia nella stessa maniera tutte le radici reali, dove una è uguale alla somma delle due rimanenti, prese in istato contrario; quindi se l'origine comune di tutte le radici pongasi

nel punto estremo A del raggio $= \sqrt{\frac{q}{3}}$, faranno le mini-

me terminate dall'arco AE , prima terza parte della semi-circonferenza AEB , le mezzane saranno terminate dall'arco EH , seconda terza parte; e le massime in istato contrario, saranno terminate nell'ultima terza parte HB della medesima semi-circonferenza. Trovansi poi queste massime in istato contrario alle due altre: perchè non possono queste, come quelle, applicarsi successivamente tre volte sopra la circonferenza del circolo, senza oltrepassare il punto della comune origine A .

18 Essendo il cubo $a^3 + 3a^2c + 3a^2c^2 + c^3$, o sia $\frac{q^3}{27}$ uguale ai due quadrati insieme $a^2 - 6a^2c^2 + 9a^2c^4 = \frac{r^2}{4}$, e $9a^2c^2 - 6a^2c^4 + c^6 = \frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4}$, ne segue, che considerandosi la radice quadrata di $\frac{q^3}{27}$, per diametro di un circolo, faranno $a^2 - 3a^2c^2$, cioè $\frac{r^2}{2}$, e $3a^2c^2 - c^6 = \sqrt{(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4})}$, le sottese di due archi, che insieme compongono il mezzo circolo. Dunque se $AB = \sqrt{\frac{q^3}{27}}$, ed $AD = \frac{r^2}{2}$, farà $DB = \sqrt{(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4})}$, cosicchè, quando $r = 0$, la sottesa BD cadrà sul diametro BA ; quando $\frac{r^2}{2} = \sqrt{(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4})}$, la AD cadrà in AE , cioè diverrà la sottesa del quadrante; e quando $\frac{q^3}{27} = \frac{r^2}{4}$; e però $\sqrt{(\frac{q^3}{27} - \frac{r^2}{4})}$, o sia $3a^2c - c^3$, farà $= 0$; la AD cadrà sopra il diametro AB ; quindi il punto D taglia ivi la mezza circonferenza nella stessa ragione, che il punto d'inflessione della radice massima divide l'arco di sessanta gradi al n. 14. Dunque, riducesi la questione a tagliare l'arco di sessanta gradi proporzionalmente alle parti date della mezza circonferenza; e perchè la mezza circonferenza è tripla dell'arco di 60 gradi; dunque ogni arco della mezza circonferenza farà triplo della corrispondente porzione nell'arco di sessanta gradi, preso sulla medesima circonferenza.

Se l'arco AD (fig. 4.) sia la metà del quadrante, cioè sia gradi 45. Avrà $AB + BE : AE :: BD : DA$; e dicendosi il raggio $= 1$, farà $BD : DA :: 2 + \sqrt{2} : \sqrt{2}$.

Dunque $\frac{r}{2} : \sqrt{\left(\frac{q^2}{27} - \frac{r^3}{4}\right)} :: \sqrt{2} : 2 + \sqrt{2}$; e quadrando ²³⁸

$\frac{r^2}{4} : \frac{q^2}{27} - \frac{r^3}{4} :: 2 : 6 + 2\sqrt{2}$, o pure, come $1 : 3 + \sqrt{2}$; e sommando gli antecedenti con i conseguenti, farà $\frac{r^2}{4} : \frac{q^2}{27} :: 1 : 4 + \sqrt{2}$. Dunque $\frac{r^2 \times 4 + \sqrt{2}}{4} =$

$\frac{q^2}{27}$, o pure $r^2 \times 4 + \sqrt{2} = \frac{4q^2}{27}$; e però, quando ciò acca-

de, il punto D divide per mezzo il quadrante AE , ed il punto E d'inflessione della radice massima, nella figura prima, dividerà per mezzo l'arco EF , e le parti di essa radice massima saranno fra di loro, come $2 + \sqrt{2} : \sqrt{2}$, ed i loro quadrati, come $6 + 2\sqrt{2} : 2$; o come $3 + \sqrt{2} : 1$, e però saranno dati per $\frac{2q}{3}$ quadrato del diametro del circolo.

In somigliante maniera possono trovarsi le espressioni algebriche delle sottese degli archi provenienti dalla divisione in due di qualunque arco dato, e conseguentemente le espressioni delle due parti della radice ricercata; e poichè in codette espressioni, non entrano, che radicali quadratiche, dunque infinite sono le equazioni di tre radici reali, ed incommensurabili fra di loro, che non contengono radicali cubiche, ma solamente quadratiche.

⁴²
È pure da notarsi, che le espressioni delle radici reali per via de' seni, o delle sottese degli archi circolari, sono per se stesse esatte, e generali; e per le equazioni numeriche, non v'ha certamente metodo più semplice, generale, ed accurato.

19 Sebbene per le equazioni geometriche richiegga la trisezione dell'arco circolare, la quale non ottienti senza il

soccorso di qualche curva conica: con tutto ciò trattandosi di semplice approssimazione, potrássi quella ottenere senza cotal soccorso nella seguente maniera.

La somma finita di una progressione geometrica decre-

scendente all' infinito, $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \text{ec.}$ essen-

do $= \frac{1}{n-1}$. Se $n = 2$ esprima un numero dispari, se-

condo cui debbasi dividere in parti uguali un dato arco circolare: dividasi primieramente l' arco dato in un numero di parti uguali, che sia parimente pari, ed $= n$, cioè che può sempre farsi geometricamente senza bisogno di altra curva. Poi una di queste similmente dividasi, o s' intenda divisa nello stesso numero n di parti uguali; e così successivamente intendasi continuata la divisione all' infinito. Avrássi una progressione decrescente all' infinito nella ragione di n all' 1; e

perciò la somma finita $= \frac{1}{n-1}$ farà uguale alla parte ri-

cercata. Così la somma finita della serie infinita $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$

$+ \frac{1}{64} + \text{ec.} = \frac{1}{3}$; la somma della serie $\frac{1}{16} + \frac{1}{256}$

$\frac{1}{4096} + \text{ec.} = \frac{1}{15}$, che triplicata fatti $= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$, e

$\frac{1}{5}$ si è pure la somma della serie $\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216}$
 $+ \text{ec.} = \frac{1}{5}$.

Così pure la somma della serie $\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512}$
 $+ \text{ec.}$

+ ec. = $\frac{1}{7}$. Qui può notarsi, che la divisione dell'arco

circolare in sette parti uguali, è affine colla divisione del medesimo in tre, l'una, e l'altra non richiedendo, che la divisione in due continuata all'infinito.

Quantunque poi la divisione esatta in parti dispari non possa averfi, se non col continuarsi all'infinito la divisione in parti pari, potremo tuttavia avvicinarci alla parte richiesta del dato arco, talmente che la differenza dal giusto sia minore di qualunque assegnata quantità: in fatti, ove trattisi della trisezione, se si prendano solamente i cinque pri-

mi termini della serie $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024}$

+ ec. la loro somma mancherà dalla giusta terza parte,

solamente per $\frac{1}{3072}$, e la somma dei dieci primi termini

della medesima serie, mancherà solamente per $\frac{1}{2145728}$; e

quindi quanto maggiore sarà il numero dispari delle parti uguali, in cui dovrà dividersi l'arco proposto, tanto più convergente farassi la serie, ed un minor numero di termini insieme sommati, avvicinerassi assaiissimo alla parte ricercata; e con ciò potranno a piacimento avvicinare tra loro i limiti, di cui trattossi ai numeri 15. e 16.

Molte altre cose avrei potuto inferire in questa esercitazione, se giudicate le avessi utili ad ulteriori ricerche, o di gradimento alle persone studiose in cotale materia: solamente qui sul fine soggiugnerò, che quantunque dalle cose itate finora dette e da me, e da altri moltissimi a questo proposito, non apparisca la via, per cui colla sola scorta del raziocinio, e de' noti principii conseguire si possa una risoluzione generale, ed algebrica di codesta sorta di equazioni; sicchè contentare ci dobbiamo di altre non affatto precise,

G g

sebbene per l'uso generali, e bastantemente accurate: con tutto ciò essendo certissimo, che dalla varia relazione tra q , ed r , o per l'omogeneità de' termini, tra q^1 , ed r^1 , o pure tra $q\sqrt{q}$, ed r , dipende quella della incognita alle date; ed avendosi potuto osservare, che tutte le risolvibili ne somministrano una particolare equazione tra q , ed r ; ne segue, che essendo queste sempre date, sempre possa tra esse trovarsi alcuna equazione, da cui tornando, dirò così, allo indietro, pare, che scoprire si possa la ragione tra l'incognita, e le date, almeno in quel caso particolare. Che se dopo molte di cotali osservazioni venisse fatto di scoprire alcuna legge costante tra dette relazioni meno involupata di quella, che ricavasi dalla formola generale, avremmo allora una induzione bastante ad indicarci il metodo da tenersi, per giugnere alla risoluzione generale, ed algebrica.

IL FINE.

ERRORI

CORREZIONI

- Pag. 3 lin. 3, *e, dopo* *e dopo*
- Pag. 4 princip. lin. 14 *tri,* *trui,*
- Pag. 11 *sotto al più* *sotto a più*
- Pag. 11, ed in altrove *siffone* *sifone*
- Pag. 17 lin. 2 *dicasì M la celerità* *dicasì M, la celerità*
- Pag. 51 lin. 1. 259. 1., 256. 11., 259. 1., 256. 11., 253. 2. 4.,
259., 256. 1., 253. 3. *e le ritrovate col metodo sono*
265., 261. 11., 259., 256. 1.,
253. 3.
- Pag. 59 Sper. 9 lin. 5 *dà piedi cubici 5. 4. 5.* *dà piedi cubici 6. 7. 3., e fatto*
colla terza, e quarta scala dà
5. 4. 5.
- Pag. 61 tra le lin. 17 e 18 *le più basse, e vicine al fondo,*
perchè più tardi entrano
13 sezioni. Ove
- Pag. 63 il n. marginale 13 *va*
potto in capo alla lin. 28
- Pag. 83 in fine della linea 27 *poche linee di* *poche linee*
- Pag. 85 lin. 21 *al tubo* *il tubo*
- Pag. 87 lin. 9 *risfrigne* *non risfrigne*
- Pag. 98 lin. 3 = 11. 8. *= 11. 3.*
- Pag. 114 lin. penult. (fig. 1.) *(Fig. I.)*
- Pag. 116 lin. 12 *un anello, in cui* *un anello, una coppa, in cui*
- Pag. 132 al Corol. manca il
n. marginale 3 *3 Dunque*
- Pag. 136 Osserv. 5 manca il
n. marginale 5 *5 Rappresenti*
- Ibidem lin. 19 = — 9 — 1 *= 9 — 1*
- Pag. 146 lin. 20 manca il
n. marginale 8 *8 Prima che*
- Pag. 156 lin. 5 *con i tre me-* *con i tre medii, e più col medio*
dii, come questa *sta alla somma dei cinque medii*
con i tre medii, come questa

ERRORI

CORREZIONI

Pag. 158 caso 6 lin. 12

$$= a \times x - t + 2u$$

Ibid. lin. 17 *aggiugnendo ap + a*

Pag. 166 Prob. 12 manca il
n. marginale 9

Pag. 172 lin. penult. $x^4 - 7x^3$

Pag. 174 lin. 1 *continua all' ec.*

Pag. 184 lin. 4, $pq = gr$

Pag. 188 lin. 5, $\frac{q^3}{27} = r^3$

Pag. 192 lin. 14 *dividendo p*

Pag. 194 n. 6 lin. 9, *non ci aiuti*

Pag. 197 lin. 14, $r + = 0$

Pag. 200 lin. 12 $3 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{\text{ec.}} \quad 3 \times \frac{1}{2} (\sqrt{\frac{r}{2}} \text{ ec.}$

Pag. 203 lin. 11

$$= b - \sqrt{-c^2}$$

Pag. 210 lin. 3 $\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{2}$

Ibid. lin. 9, $c^2 = \frac{a^2}{3 + \sqrt{6}}$

Pag. 217 lin. 17 (fig. 2.)

Pag. 218 n. 6 lin. 5 $\sqrt{(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l})}$ $(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l})$

Pag. 221 lin. 19 *la frazione $\frac{1}{2}$ d la frazione $\frac{d}{2l}$*

Pag. 227 n. 17 lin. 3 AC (fig. 3.) AC (Fig. III.)

Pag. 230 n. 18 lin. 7 $AD = \frac{r^2}{2}$ $AD = \frac{r}{2}$

Ibid. lin. 22 (fig. 4.)

$$= a \times t + 2u$$

aggiugnendo ap + aq

9 *Data la*

$$x^4 - 7x^3$$

continuata all' infinito

$$pq = 9r$$

$$\frac{q^3}{27} = \frac{r^3}{4}$$

dividendo per p

ci aiuti

$$\pm r = 0$$

$$= a - \sqrt{-c^2}$$

$$= a - \sqrt{-c^2}$$

$$\frac{q^3}{27} - \frac{r^3}{4}$$

$$c^2 = \frac{a^2}{3 + \sqrt{6}}$$

(Fig. II.)

$$(\frac{q}{2} - \frac{d}{2l})$$

$$\frac{d}{2l}$$

(Fig. III.)

$$AD = \frac{r}{2}$$

(Fig. IV.)

Fig. 1^a

3^a

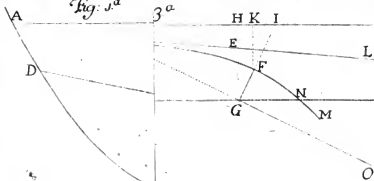


Fig. 1^o

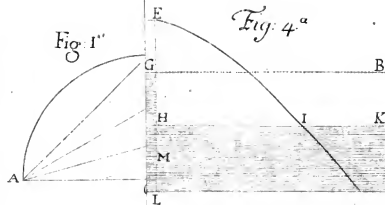


Fig. 4^a



